



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

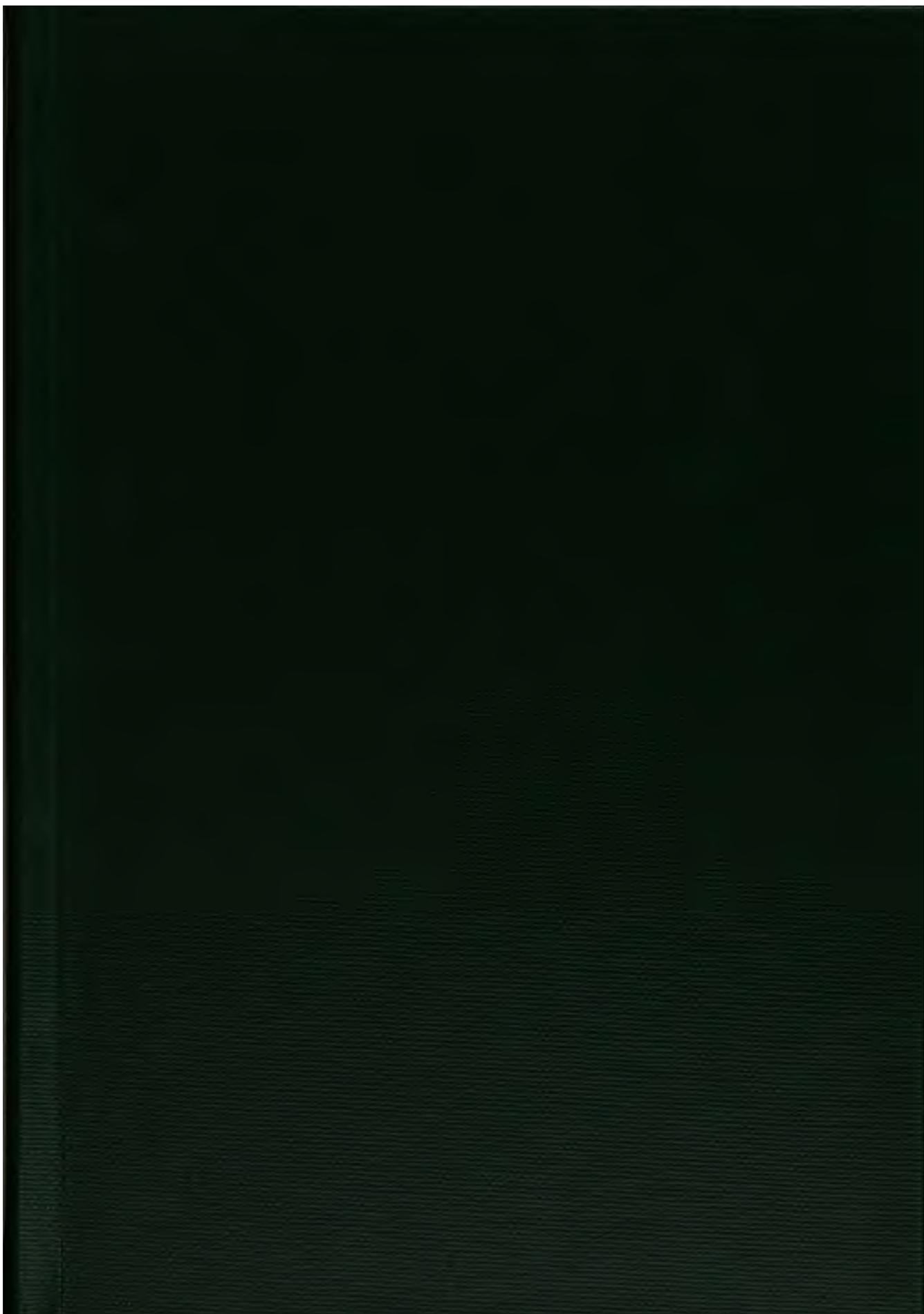
Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

- + *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
- + *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
- + *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
- + *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertarti di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da <http://books.google.com>



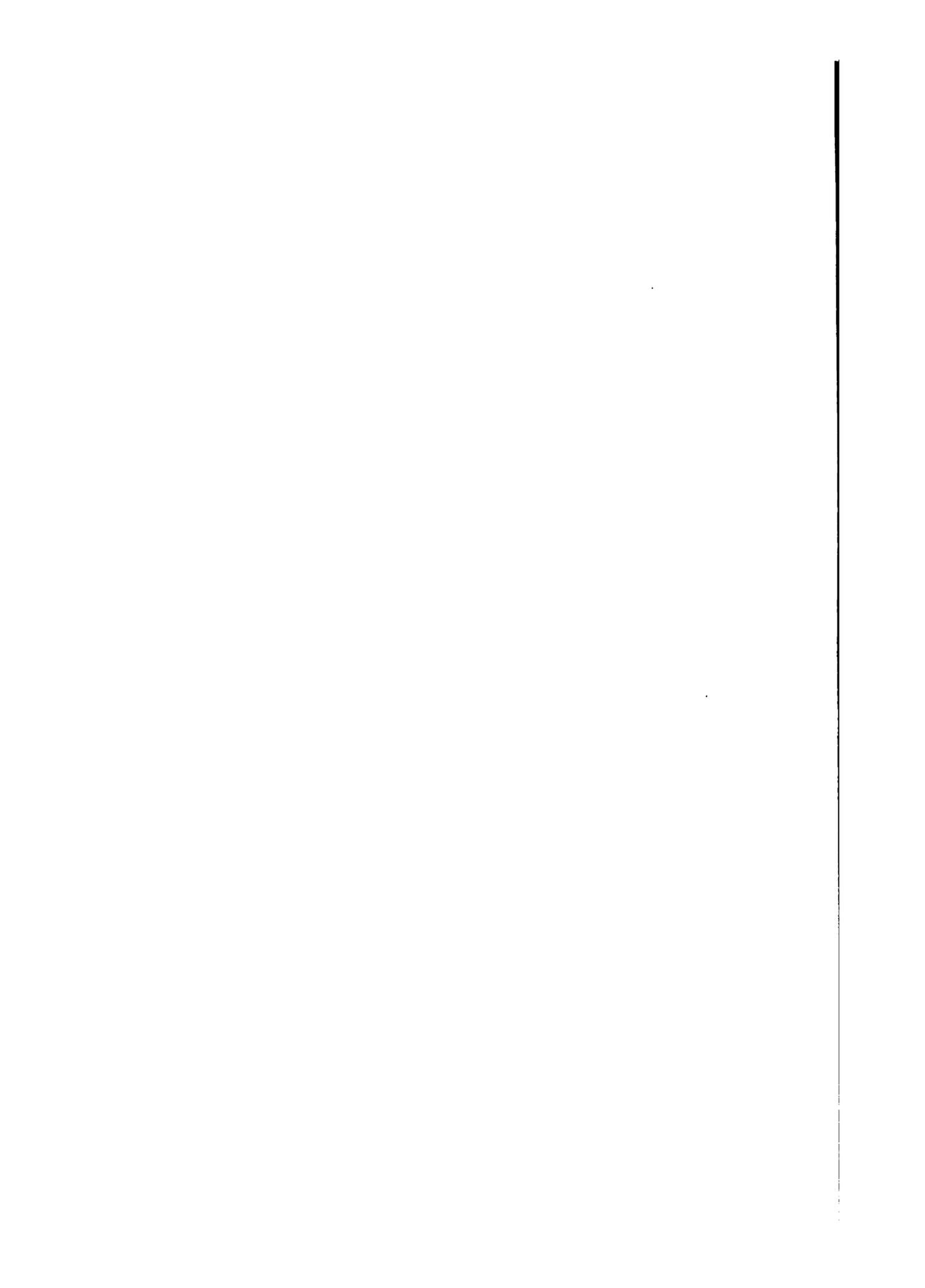
**HARVARD COLLEGE
LIBRARY**



**FROM THE
FARRAR FUND**

*The bequest of Mrs. Eliza Farrar in
memory of her husband, John Farrar,
Hollis Professor of Mathematics,
Astronomy and Natural Philosophy,
1807-1836*

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY



LEZIONI
DI
GEOMETRIA INTRINSECA

PER
ERNESTO CESÀRO

PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI NAPOLI

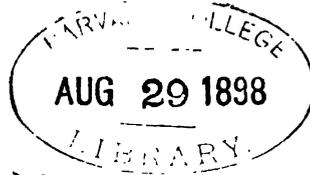
Mon verre n'est pas grand, mais je bois dans mon verre.
(A. DE MUSSET)

SOMMARIO: Discussione intrinseca delle curve piane, e formole per la loro analisi intrinseca - Curve piane notevoli - Contatto ed osculazione - Rullette, baricentri, analisi baricentrica - Sistemi di curve piane - Curve storte e superficie rigate - Curve storte notevoli - Superficie e congruenze - Superficie notevoli - Deformazioni delle superficie - Spazii a tre dimensioni - Curve negli iperspazii - Iperspazii - Applicazioni meccaniche.

NAPOLI
PRESSO L'AUTORE-EDITORE: VIA SAPIENZA, 29.

1896

Math 9008.96.3



Farrar fund.

PROPRIETÀ LETTERARIA

NAPOLI

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE
diretta da E. de Rubertis fu Michele

1253
31

AI SIGNORI PROFESSORI

P. MANSION & J. NEUBERG

DELLE UNIVERSITÀ DI GAND E DI LIEGI

IN SEGNO DI GRATITUDINE

E. CESÀRO

AL LETTORE

Raccogliere e coordinare le formole fondamentali per l'analisi intrinseca degli enti geometrici; esporne sobriamente, e per vie elementarissime, le più semplici applicazioni, col solo scopo di mettere in luce la potenza del metodo intrinseco ed affermarne la superiorità sull'insieme dei procedimenti in uso per lo studio infinitesimale dei fatti geometrici dello spazio; stabilire e proporre una segnatura uniforme ed espressiva, che permetta di svolgere i calcoli con elegante agilità; comunicare ai miei uditori il gusto, in me vivissimo, di simili ricerche: con questo programma io presi a dettare, nell'Università di Napoli, il breve corso di lezioni, che ora pubblico. Mi auguro che ne germoglino ben presto, per opera di valorosi giovani italiani, più importanti ed elevate produzioni.

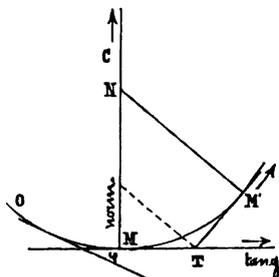
Napoli, 15 Giugno 1895.

E. C.

P. S. (12 Maggio 1896). Se da questo libro verrà qualche vantaggio alla cultura matematica italiana se ne dovrà esser grati ad un mio caro ed illustre Maestro, il Prof. VALENTINO CERRUTI dell'Università di Roma, al cui valido appoggio morale e materiale debbo se sono riuscito, dopo quasi due anni di peripezie, a rimuovere gli ostacoli che si opponevano a questa pubblicazione. Sento poi il dovere di manifestare al mio amico Dott. Alfredo Perna, per la correzione delle bozze e per l'accurata ed intelligente esecuzione delle figure, la mia viva riconoscenza.

I. DISCUSSIONE INTRINSECA DELLE CURVE PIANE.

1. **Tangente e normale.** Siano M ed M' due punti d'una curva piana. Fissato M , si faccia tendere M' ad M , lungo la curva. Se la retta MM' tende ad occupare una posizione limite, in questa essa prende il nome di *tangente*, e la perpendicolare elevata per M alla tangente si chiama *normale* alla curva, in M . Supporremo sempre che, dato M , si possa prendere M' abbastanza vicino ad M perchè l'arco MM' ammetta in ogni punto la tangente, ed inoltre l'angolo φ della tangente in M con una retta fissa varii sempre in un senso quando M si avvicina indefinitamente ad M' . In queste condizioni è chiaro che la lunghezza δs dell'arco MM' , superiore a quella della corda MM' , è inferiore alla somma delle distanze u e v di M' alla normale ed alla tangente in M , dimodochè si ha



$$\sqrt{u^2 + v^2} < \delta s < u + v ;$$

e poichè, per la definizione stessa della tangente, quando M' tende ad M

$$\lim \frac{v}{u} = 0 , \quad (1)$$

si ha pure

$$\lim \frac{\delta s}{u} = 1 . \quad (2)$$

D'ora innanzi assumeremo sempre come variabile indipendente la lunghezza s dell'arco OM , contata in un dato senso a partire da un'*origine* O , scelta

ad arbitrio fra i punti della curva, dimodochè, stabilito come infinitesimo principale l'incremento che subisce s nel passaggio da M ad M' , cioè la lunghezza δs dell'arco MM' , si vede dalla (2) che, nelle ricerche di limiti di rapporti, a δs si può sostituire u ; poi la (1) mostra che v è un infinitesimo superiore. Dunque, fra le infinite rette che passano per M , *la tangente è caratterizzata dal fatto che le sue distanze dai punti infinitamente vicini ad M sono infinitesime di ordine superiore.*

2. Curvatura. Supponiamo che, col tendere di M' ad M , anche il punto d'incontro N delle normali in M ed M' tenda ad una posizione limite C . Il punto C si chiama *centro di curvatura*, e la sua distanza da M , contata in un dato senso, è il *raggio di curvatura*, che si rappresenta abitualmente con ρ . Siccome è naturale che si chiami più o meno curvo l'arco infinitesimo MM' , secondo che il punto N è più o meno vicino ad M , si è condotti a prendere $\frac{1}{\rho}$ come *misura della curvatura*. Intanto si ha

$$MC = \lim MN = \lim (v + u \cot \delta\varphi) = \lim \frac{u}{\delta\varphi} ;$$

quindi

$$\frac{1}{\rho} = \lim \frac{\delta\varphi}{\delta s} . \quad (3)$$

La curvatura si può dunque considerare anche come il limite del rapporto dell'angolo $\delta\varphi$ all'arco δs . Evidentemente ρ varia, in generale, da un punto all'altro della curva, cioè *la curvatura è funzione dell'arco*, e si vedrà ben presto che il conoscere questa funzione basta per definire la *forma* della curva, ma non per fissarne la *posizione* nel piano. Per tale ragione la relazione

$$f(s, \rho) = 0 ,$$

che si ha in ogni punto d'una curva fra s e ρ , si chiama *l'equazione intrinseca* della curva stessa.

3. Anche l'angolo φ è funzione di s , e l'eguaglianza (3) ci dice che la curvatura è appunto la derivata di tale funzione. Ne segue che, se si computano gli angoli φ a partire dalla tangente nell'origine (arbitraria) degli archi, si ha

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{\rho} ,$$

purchè l'integrale abbia un senso: ciò si potrà sempre ottenere nelle curve che stiamo considerando, perchè basterà assumere l'origine O talmente vicina ad M , che in ogni punto dell'arco OM esista la tangente. La funzione φ ha grande importanza per la discussione delle curve piane, date mediante la loro equazione intrinseca. Quando, col tendere di s ad un limite finito o infinito, φ diventa infinita, la tangente nel corrispondente

punto M cessa di esistere. Noi supporremo sempre che ciò avvenga soltanto in punti isolati.

4. Trasportiamo per un istante in M l'origine degli archi, e prendiamo M' abbastanza vicino ad M per escludere dall'arco MM' ogni punto a tangente indeterminata. Se si osserva che si ha

$$\frac{du}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dv}{ds} = \operatorname{sen} \varphi, \quad (4)$$

la regola di l'Hospital dà subito, per M' tendente ad M,

$$\lim \frac{v}{u^2} = \frac{1}{2} \lim \frac{\operatorname{tg} \varphi}{u} = \frac{1}{2\rho}. \quad (5)$$

Dunque la distanza della tangente in M dai punti infinitamente vicini ad M è generalmente infinitesima del secondo ordine; ma diventa infinitesima di ordine superiore o inferiore al secondo quando la curvatura è nulla o infinita, rispettivamente. Ora osserviamo che, data l'equazione intrinseca, e calcolata φ , l'integrazione delle (4) fornisce u e v in funzione di s , e permette di costruire qualunque arco della curva, che non racchiuda punti a tangente indeterminata. Così è dimostrato che i vari pezzi d'una curva, privi di tangente solo negli estremi, sono determinati nella forma dall'equazione intrinseca, pur rimanendo arbitraria la loro mutua disposizione come la situazione dell'intera curva nel piano.

5. Esempi: a) Se la curvatura è nulla in ogni punto, si ha $\varphi=0, u=s, v=0$, e però la linea è retta. Si trova più generalmente una circonferenza di raggio a quando $\rho=a$. Si ha infatti

$$\varphi = \frac{s}{a}, \quad u = a \operatorname{sen} \frac{s}{a}, \quad v = a \left(1 - \cos \frac{s}{a}\right),$$

e si vede subito che tutti i punti della curva distano di a dal centro unico di curvatura, e che in questo concorrono tutte le normali. In particolare si può considerare $\rho=0$ come l'equazione intrinseca d'un punto isolato. Un'equazione qualunque, che contiene l'unica variabile ρ , rappresenta un insieme di punti e di cerchi, reali o immaginari.

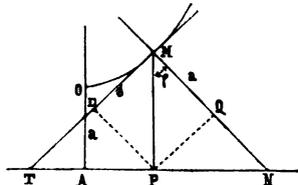
b) Si chiama *catenaria* la curva rappresentata dall'equazione

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}.$$

Nell'origine degli archi è $\rho=a$; poi, quando s cresce indefinitamente, anche ρ va crescendo all'infinito, mentre

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{\rho} = \operatorname{arctg} \frac{s}{a} \quad (6)$$

cresce da 0 ad $\frac{1}{2}\pi$. Dunque la tangente tende a disporsi perpendicolarmente alla



sua posizione iniziale, ed intanto si allontana all'infinito, perchè

$$u = a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = a \log \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

crebbe indefinitamente con s . Altrettanto accade per s negativo: la curva è manifestamente simmetrica rispetto alla normale nell'origine. La parallela condotta alla tangente nell'origine, alla distanza a , in modo da non incontrare la curva, si chiama *direttrice*. Ora

$$v = a \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{a}{\cos \varphi} - a,$$

e però, se si proietta M sulla direttrice, in P , la proiezione di MP sulla normale è costantemente uguale ad a . Inoltre, siccome dalla (6) si ha $s = a \operatorname{tg} \varphi$, la proiezione di MP sulla tangente è uguale all'arco OM . Finalmente, se si osserva che $\rho \cos^3 \varphi = a$, si vede che il centro di curvatura, in M , è simmetrico, rispetto ad M , del punto in cui la normale incontra la direttrice.

c) Rassomiglia alla precedente la *catenaria di eguale resistenza*:

$$\rho = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right).$$

Il calcolo di φ conduce alle formole

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad s = a \log \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

dalle quali si vede che ρ e φ variano con s come per la catenaria. Inoltre la prima formola mostra che la *proiezione del raggio di curvatura* sulla normale nell'origine degli archi è costante. Sono anche da notare le formole $u = a\varphi$, $v = a \log \frac{\rho}{a}$, che si ottengono integrando le (4).

6. Flessi e cuspidi. Riprendiamo la formola (5) ed osserviamo che, quando in un punto M la curvatura ha un valore finito, diverso da zero, la curva è situata tutta (nelle vicinanze di M) da una parte sola della tangente, perchè, nel tendere di M' ad M , qualunque sia il segno di u , finisce v per assumere e conservare il segno di ρ . Supponiamo invece che, contando gli archi a partire da M , ρ tenda a zero o vada indefinitamente crescendo come la potenza n^{ma} di s : ciò avverrà sempre quando fra s e ρ intercede una relazione algebrica, nel qual caso si potrà inoltre affermare che n è razionale. Ora, supponendo $n < 1$, si ha

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{v}{u^{2-n}} = \frac{1}{2-n} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{u^{1-n}} = \frac{1}{(2-n)(1-n)} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{s^n}{\rho} \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \end{cases}, \quad (7)$$

e si riconosce nuovamente che fra la curva e la tangente si avvera un contatto *maggiore* del solito quando ρ è infinito ($n < 0$), ed un *minor* con-

tatto quando ρ è nullo ($0 < n < 1$). In entrambi i casi la curva ha l'ordinaria forma, intorno al punto che si considera, se n è il quoziente d'un numero pari per un numero dispari; ma, quando n è il quoziente di due numeri dispari, v cambia segno insieme ad u , cioè, in M , la curva attraversa la tangente, e ciò si riconosce anche, più direttamente, osservando che ρ cambia segno con s . In questo caso il punto M si chiama *flesso* o *punto d'inflessione*. Invece, se n è il quoziente d'un numero dispari per un numero pari, l'infinitesimo u è suscettibile di soli valori positivi, per ciascuno dei quali v prende due valori con segni opposti. Dunque la curva esiste da una parte sola della normale, e vi ammette due rami, separati dalla tangente. Si dice allora che in M si ha una *cuspidè*, o che M è un *punto di regresso*. Le cuspidi ed i flessi possono dunque presentarsi solo per quei valori di s , che sono radici delle equazioni

$$\rho = 0 \quad , \quad \frac{1}{\rho} = 0 \quad ;$$

ed è utile notare che, quando si considerano le sole radici semplici, la prima equazione fornisce le cuspidi, la seconda i flessi.

7. Assintoti. Se, per s infinito, la funzione φ tende ad un limite finito α , la curvatura non può tendere ad un limite non nullo, perchè, ammessa l'esistenza d'un tal limite, siccome si ha

$$\alpha = \lim \frac{s\varphi}{s} = \lim \left(\varphi + \frac{s}{\rho} \right) = \alpha + \lim \frac{s}{\rho} \quad , \quad (8)$$

si vede che necessariamente ρ deve crescere all'infinito con s . Si ha dunque un punto di maggior contatto, le cui coordinate rispetto alla tangente ed alla normale in un punto qualunque (che si suppone tuttavia scelto in modo che φ resti finito) si ottengono integrando le (4):

$$u = \int_0^\alpha \rho \cos \varphi d\varphi \quad , \quad v = \int_0^\alpha \rho \sin \varphi d\varphi \quad .$$

È possibile che i precedenti integrali siano infiniti, ed allora il punto considerato sta all'infinito, ma la tangente alla curva, nel punto stesso, è ben determinata dall'angolo α e dalla distanza all'origine

$$q = u \sin \alpha - v \cos \alpha = \int_0^\alpha \rho \sin(\alpha - \varphi) d\varphi \quad ,$$

che può avere un valore determinato. La retta così ottenuta, posizione limite della tangente in un punto M , che si allontana indefinitamente lungo un dato ramo della curva, si chiama *assintoto*. Ora si osservi che l'ultima formola fa conoscere il valore della distanza q dell'assintoto da un punto qualunque della curva. Se si suppone che questo vada retrocedendo verso

il più vicino punto, in cui φ diventa infinito, l'espressione di q si trasforma in

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \rho \operatorname{sen}(\alpha - \varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} \rho \operatorname{sen} \psi d\psi ,$$

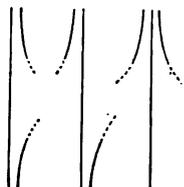
ponendo $\alpha - \varphi = \psi$. Dunque, se si calcola

$$\psi = \int \frac{ds}{\rho}$$

e si determina ρ in funzione di ψ , la distanza cercata sarà data dalla formola

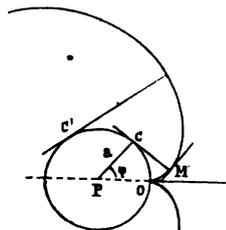
$$q = \int_0^{\infty} \rho \operatorname{sen} \psi d\psi . \quad (9)$$

Se si suppone invece che il punto si allontana indefinitamente, a sua volta, sullo stesso ramo di curva, già percorso dal punto di contatto, è chiaro che α tende a zero, e però altrettanto si può dire di q , cioè *la distanza del punto mobile sulla curva all'assintoto tende a zero*. Osserviamo finalmente che, in virtù di (8), l'assintoto può esistere solo quando ρ è infinitamente grande insieme ad s , d'un ordine superiore. Se si trova che l'ordine è misurato dal quoziente d'un numero dispari per un numero pari, si può dire che all'infinito la curva si comporta come intorno ad un punto ordinario, e però essa ha due rami che si estendono all'infinito nei due sensi, da una stessa parte dell'assintoto. Invece, se l'ordine è misurato dal quoziente di un numero intero, dispari o pari, per un numero dispari, i due rami sono separati dall'assintoto, e si estendono nei due sensi o in un senso solo. Si ha, nel primo caso, un assintoto *inflexionale*, e nel secondo un assintoto *cuspidale*.



un assintoto *inflexionale*, e nel secondo un assintoto *cuspidale*.

8. Esempii: a) La curva rappresentata dall'equazione $\rho^2 = 2as$ ha, nell'origine, un punto di regresso; poi si svolge intorno all'origine in una infinità di spire, sempre meno curve, che si estendono all'infinito. Si ha infatti $\rho = a\varphi$, e si vede così che ρ e φ , nulli con s , crescono indefinitamente insieme ad s . La distanza d'un punto qualunque alla tangente cuspidale è



$$v = a \int_0^{\varphi} \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi = a(\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi) .$$

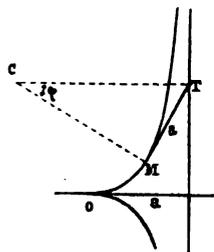
Dunque la distanza del centro di curvatura alla medesima retta è $a \operatorname{sen} \varphi$, e però *i centri di curvatura stanno sopra una circonferenza di raggio a* . Inoltre, poichè MC è appunto uguale all'arco OC della circonferenza, si può immaginare la curva come descritta da uno dei capi d'un filo inestendibile, avvolto sulla circonferenza, mentre l'altro capo si tiene fisso ed il filo si va svolgendo man-

tenendosi sempre teso. Per questa ragione alla curva considerata si dà il nome di *sviluppante di circolo*.

b) Chiamasi *trattrice* la curva definita dall'equazione $\rho = a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$. Supponendo s infinitesimo, si vede subito che, intorno all'origine, questa curva si comporta come la sviluppante di circolo, rappresentata dall'equazione $\rho = \sqrt{2as}$; ma, crescendo s all'infinito, l'angolo φ , crescendo sempre, tende ad $\frac{1}{2}\pi$, perchè si ha $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$; e siccome

$$u = \int_0^\varphi \rho \cos \varphi \, d\varphi = a(1 - \cos \varphi)$$

tende ad a , si vede che, alla distanza a dalla cuspidale, e perpendicolarmente alla tangente cuspidale, esiste un asintoto. Inoltre, per la seconda formola trovata, è costantemente uguale ad a il segmento di tangente compreso fra il punto di contatto e l'assintoto; e la prima formola conduce ad una costruzione semplice del centro di curvatura, perchè mostra che il centro di curvatura si proietta, sull'assintoto, al piede della tangente. Finalmente, per tener conto delle due determinazioni che ha ρ per ciascun valore di s , bisogna immaginare la curva come costituita da due rami infiniti, simmetricamente posti rispetto alla comune tangente cuspidale.



c) Molto importante è la classe di curve, definita dall'equazione

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1 .$$

A questa si soddisfa prendendo $s = a \operatorname{sen} \theta$, $\rho = b \operatorname{cos} \theta$, di guisa che $\varphi = \frac{a}{b} \theta$.

Un arco di lunghezza $2a$, simmetrico rispetto all'origine, è tutto chiuso nel circolo di raggio b , che lo tocca nell'origine stessa ($\theta = 0$), e termina in due cuspidi ($\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$). Rispetto alla tangente ed alla normale nell'origine le coordinate d'una cuspidale sono

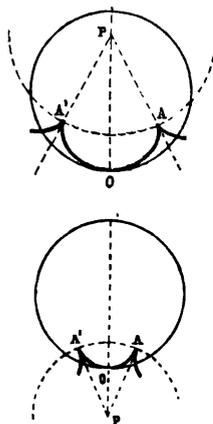
$$u = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{a\theta}{b} \operatorname{cos} \theta \, d\theta = -\frac{ab^2}{a^2 - b^2} \operatorname{cos} \frac{\pi a}{2b} ,$$

$$v = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{a\theta}{b} \operatorname{cos} \theta \, d\theta = \frac{ba^2}{a^2 - b^2} - \frac{ab^2}{a^2 - b^2} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{2b} .$$

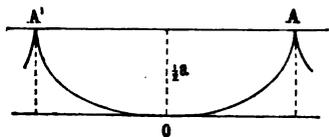
Le tangenti cuspidali concorrono dunque in un punto P, situato alle distanze rispettive

$$\frac{ab^2}{a^2 - b^2} , \quad \frac{ba^2}{a^2 - b^2}$$

dalle cuspidi e dall'origine. La circonferenza descritta dal centro P col raggio $ab^2 : (a^2 - b^2)$ si chiama *direttrice*. Per tener conto del cambiamento di segno

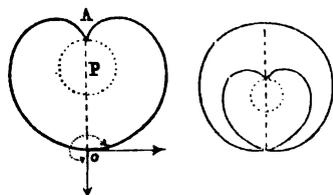


di ρ quando s diventa uguale ad a , bisogna immaginare la curva come costituita da più archi, tangenti fra loro nelle cuspidi: il luogo di queste è appunto la direttrice. Secondo che $a > b$ o $a < b$ la curva è *esterna* o *interna* alla direttrice. Nel primo caso si chiama *epicicloide*, nel secondo *ipocicloide*. Particolarmente notevole è la *cicloide*. Questa è rappresentata dall'equazione $s^2 + \rho^2 = a^2$, ed è, per così dire, la curva che separa le ipocicloidi dalle epicicloidi: la sua direttrice è rettilinea. In generale il numero delle cuspidi è infinito; ma per le linee cicloidalì, che



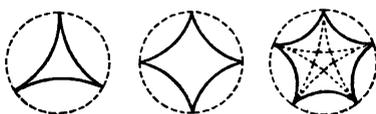
hanno a considerare ordinariamente, il rapporto $a:b$ è razionale, ed a ciò si deve se le cuspidi cadono in un certo numero limitato di punti, vertici d'un poligono regolare. Questi possono essere incontrati nell'ordine stesso in cui si seguono sulla circonferenza direttrice da un punto che percorre la curva in modo continuo, ma può anche darsi che il punto mobile raggiunga successivamente le cuspidi in altro ordine, ed allora si ha una linea cicloidale *stellata*. Le più semplici epicicloidi son quelle che hanno una sola cuspidè. Affinchè, partendo dalla cuspidè A, il punto mobile ritorni in A senza avere incontrato altra cuspidè, è necessario che l'angolo delle direzioni positive della tangente cuspidale e della

tangente nell'origine, cioè $\frac{\pi a}{2b}$, sia uguale ad un numero dispari (≥ 3) di volte $\frac{1}{2}\pi$. Nel caso più semplice dev'essere $a=3b$, ed allora si ha la *cardioide*, che vien dunque rappresentata dall'equazione $s^2 + 9\rho^2 = costante$. Più generalmente, se n è un numero dispari, l'equazione $s^2 + n^2\rho^2 = costante$ rappresenta un'epicicloide monocuspidè, che per $n=5, 7, 9, \dots$ sarà una *cardioide stellata* sempre più complicata. Le più semplici ipocicloidi son quelle che hanno tre o quattro cuspidi; per esse l'angolo $\pi - \frac{\pi a}{b}$ è la terza o la quarta parte di 2π , e però si ha $b=3a$ per le tricuspidi, $b=2a$ per le altre. Dunque l'ipocicloide tricuspide è rappresentata dall'equazione $9s^2 + \rho^2 = costante$, e la tetracuspide, che si chiama anche *asteroide*, dall'equazione $4s^2 + \rho^2 = costante$. Per cinque cuspidi si ha, oltre l'ipocicloide $25s^2 + 9\rho^2 = costante$, anche l'ipocicloide stellata $25s^2 + \rho^2 = costante$; ecc.

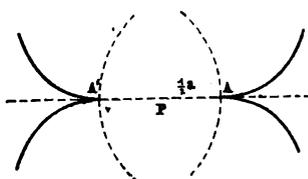


quattro cuspidi; per esse l'angolo $\pi - \frac{\pi a}{b}$ è la

terza o la quarta parte di 2π , e però si ha $b=3a$ per le tricuspidi, $b=2a$ per le altre. Dunque l'ipocicloide tricuspide è rappresentata dall'equazione $9s^2 + \rho^2 = costante$, e la tetracuspide, che si chiama anche *asteroide*, dall'equazione $4s^2 + \rho^2 = costante$. Per cinque cuspidi si ha, oltre l'ipocicloide $25s^2 + 9\rho^2 = costante$, anche l'ipocicloide stellata $25s^2 + \rho^2 = costante$; ecc.



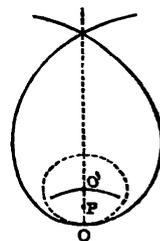
d) *Pseudocicloidi* sono le curve rappresentate dalle equazioni



$$s^2 - \rho^2 = a^2, \quad \rho^2 - s^2 = a^2,$$

alle quali si soddisfa prendendo

$$s = \frac{a}{2}(e^\varphi \pm e^{-\varphi}), \quad \rho = \frac{a}{2}(e^\varphi \mp e^{-\varphi}),$$



dove φ ha il solito significato. La prima curva ha una cuspidè ($\varphi=0, s=a$), intorno alla quale si comporta come la svilupante d'un circolo di raggio a intorno alla sua cuspidè; l'altra si comporta invece intorno all'origine ($\varphi=0, \rho=a$) quasi come una catena-

ria $(\rho = a + \frac{s^2}{2a})$. Entrambe, crescendo s , si svolgono in infinite spire, che si estendono all'infinito e tendono ad incontrare sotto l'angolo $\frac{1}{4}\pi$ le rette uscenti da un punto. Infatti, scelta convenientemente l'origine P delle coordinate u e v , si ha, per un punto qualunque,

$$u = \frac{1}{2}(s \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \quad , \quad v = \frac{1}{2}(s \sin \varphi - \rho \cos \varphi) .$$

Ne segue che la pseudocicloide cuspidata incontra i raggi vettori sotto un angolo che va crescendo da 0 ad $\frac{1}{4}\pi$, mentre per l'altra il medesimo angolo va decrescendo da $\frac{1}{4}\pi$ ad $\frac{1}{4}\pi$. Inoltre le proiezioni del raggio vettore PM sulla tangente e sulla normale in M sono rispettivamente uguali alla metà dell'arco s ed alla metà del raggio di curvatura in M .

9. Punti assintotici. Dobbiamo ancora considerare quelle radici di ρ , che rendono infinita la funzione φ . Nel punto M , corrispondente ad una di esse, non esiste la tangente; ma questa, per le ipotesi fatte, esiste in un punto M' sufficientemente vicino ad M , ed in tutti i punti intermedi. Quando M' tende ad M , la tangente in M' , eseguendo infiniti giri sempre in un senso, finisce per diventare indeterminata. La curva si avvolge dunque indefinitamente intorno al punto M , che per questa ragione si chiama *punto assintotico*, sebbene possa essere raggiunto da M' anche dopo un percorso finito. Le coordinate d'un tal punto si calcolano integrando le (4), le quali danno, assumendo φ come variabile d'integrazione,

$$u = \int_0^{\infty} \rho \cos \varphi d\varphi \quad , \quad v = \int_0^{\infty} \rho \sin \varphi d\varphi \quad , \quad (10)$$

purchè si scelga l'origine in modo che φ resti finita nel corso dell'integrazione, vale a dire che fra l'origine ed il punto considerato non esistano altri punti a tangente indeterminata. Si constata rapidamente l'esistenza di un punto assintotico, in M , quando, messa in M l'origine degli archi, si trova che ρ è infinitesimo insieme ad s , d'un ordine non inferiore ad 1. Allora, infatti, si ha, invece di (7),

$$\lim \frac{\varphi}{\log s} = \lim \frac{s}{\rho} \geq 0 \quad ,$$

e, per $n > 1$,

$$\lim \varphi s^{n-1} = -\frac{1}{n-1} \lim \frac{s^n}{\rho} \geq 0 \quad ;$$

cioè φ diventa infinito quando s e ρ tendono a zero. Invece per $n < 1$ si è visto (§ 6) che la tangente è determinata.

10. Circoli assintotici. Per considerare tutti i casi di punti a tangente indeterminata dobbiamo cercare tutti i valori di s , finiti o infiniti, che rendono infinita la funzione φ ; e poichè, messa l'origine in M , si ha

$$\lim \frac{\varphi}{s} = \lim \frac{1}{\rho} \quad ,$$

quando esiste il secondo membro, si vede che i valori finiti annullano ρ , e però corrispondono a punti assintotici. Solo quando s cresce indefinitamente insieme a φ può darsi che ρ tenda ad un limite non nullo a . Allora la curva, invece di avvolgersi intorno ad un punto, gira assintoticamente intorno ad una circonferenza di raggio a , esternamente o internamente secondo che il valore assoluto di ρ si mantiene superiore o inferiore al suo limite; ma può anche darsi che la curva finisca per serpeggiare indefinitamente intorno alla circonferenza, come accade quando ρ non cessa di oscillare intorno al suo limite. In seguito si vedrà che il centro della circonferenza assintotica è la posizione limite a cui tende il centro di curvatura in M , quando M si allontana indefinitamente, sulla curva, dall'origine degli archi. Bisogna dunque adoperare, per trovarne le coordinate, invece delle (4) integrate, queste altre:

$$u = \int_0^s \cos \varphi ds - \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad v = \int_0^s \operatorname{sen} \varphi ds + \rho \cos \varphi.$$

Per conseguenza, al limite,

$$u = - \int_0^\infty \frac{d\rho}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi, \quad v = \int_0^\infty \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi d\varphi. \quad (11)$$

I cerchi assintotici comprendono evidentemente i punti assintotici come caso particolare, e del resto si verifica facilmente, integrando per parti, che le formole (11) si riducono alle (10) quando ρ tende a zero per φ infinito. Ed è chiaro *a priori* che solo intorno ad un punto può accadere che la curva si avvolga così strettamente da raggiungere il punto stesso dopo un percorso finito. Se poi ρ e φ crescono indefinitamente insieme ad s , anche il circolo assintotico è infinitamente grande, e ciò si può esprimere dicendo che la curva va ad avvolgere assintoticamente il punto all'infinito. Per esempio, si può dire che (§ 8, a, d) la sviluppante di circolo e le pseudocicloidi hanno un punto assintotico all'infinito.

11. Esempii: a) Il raggio di curvatura della linea rappresentata dall'equa-



zione $\rho = ae^{\frac{s}{a}}$ va crescendo da zero all'infinito quando s percorre, crescendo, l'intero sistema dei numeri reali. L'angolo

$$\psi = \int_0^\infty \frac{ds}{\rho} = \frac{a}{\rho}$$

va invece decrescendo dall'infinito a zero, e però la curva ammette un punto assintotico ($s = -\infty$) ed un assintoto ($s = \infty$), distanti fra loro per

$$q = a \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \psi}{\psi} d\psi = \frac{\pi a}{2}.$$

La curva è geometricamente definita dalla proprietà $\rho\psi = a$: sulla circonferenza

di centro C, che passa per M, la perpendicolare abbassata da C sull'assintoto stacca, a partire da M, un arco di lunghezza costante.

b) Un'equazione lineare fra s e ρ , se contiene effettivamente le due variabili, si può sempre ridurre alla forma $\rho = ks$, prendendo come origine degli archi il punto in cui si annulla ρ . In questo punto la funzione φ , proporzionale a $\log s$, diventa infinita. L'origine degli archi è dunque un punto assintotico della curva, a partire dal quale il raggio di curvatura va diventando sempre più grande, e cresce indefinitamente, come φ , insieme all'arco. Dunque la curva si svolge intorno all'origine in una infinità di spire, che si estendono all'infinito, dove ammettono un altro punto assintotico. A questa notevole curva si dà il nome di *spirale logaritmica*, ed il punto assintotico a distanza finita si chiama *polo* della spirale. Un'equazione omogenea fra s e ρ rappresenta un insieme di spirali logaritmiche, reali o immaginarie, ed anche di punti o di circoli: questi, come si vedrà meglio in seguito, sono casi limiti della spirale logaritmica, corrispondenti ai valori nulli o infiniti di k .

c) Le proprietà della spirale logaritmica si deducono facilmente dalle espressioni di u e v , relative al polo, calcolate in un punto qualunque della curva. Si ottiene subito

$$u = ks \int_0^{-\infty} e^{k\varphi} \cos\varphi d\varphi = -\frac{k^2 s}{1+k^2}, \quad v = ks \int_0^{-\infty} e^{k\varphi} \sin\varphi d\varphi = \frac{ks}{1+k^2};$$

quindi $k = \cot\theta$, chiamando θ l'angolo acuto che fa la spirale, in M, col raggio vettore OM. Dunque la spirale logaritmica incontra sotto un angolo costante tutte le rette uscenti dal polo. Vedremo in seguito che questa proprietà caratterizza la spirale logaritmica, purchè si escludano i valori 0 ed $\frac{1}{2}\pi$ di θ , ai quali corrispondono le rette e le circonferenze, e si prenda inoltre il polo a distanza finita. Intanto si ha

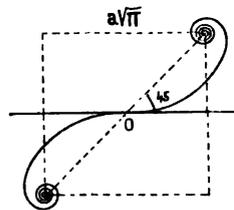
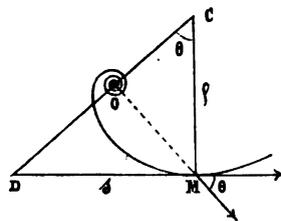
$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{ks}{1+k^2} = s \cos\theta = \rho \sin\theta.$$

Dunque la perpendicolare condotta per O al raggio vettore OM incontra la normale nel centro di curvatura, e stacca dalla tangente, a partire da M, un segmento uguale alla lunghezza dell'arco OM. Anche queste (come si vedrà) sono proprietà caratteristiche della spirale logaritmica.

d) Si chiama *clotoide* la curva definita dall'equazione $s\rho = a^2$. Qui la funzione φ è proporzionale ad s^2 . Essa è finita per $s=0$, quando ρ è infinito, ed infinita per $s = \pm\infty$, quando $\rho=0$. Dunque l'origine degli archi è un punto d'inflessione, a partire dal quale, nei due sensi, la curvatura si va sempre più accentuando, in modo che la curva va ad avvolgersi assintoticamente intorno ai suoi estremi, simmetricamente posti rispetto all'origine. Siccome si ha

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{\rho} = \frac{s^2}{2a^2}, \quad \rho = \frac{a^2}{s} = \pm \frac{a}{\sqrt{2\varphi}},$$

le coordinate d'un punto assintotico, rispetto alla tangente ed alla normale nell'o-



rigine, sono

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi, \quad v = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi.$$

Ora, osservando che

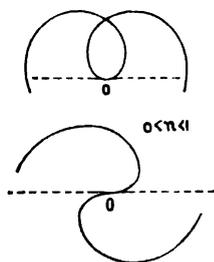
$$u + iv = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \varphi^{-\frac{1}{2}} e^{i\varphi} d\varphi = a \sqrt{\frac{i\pi}{2}},$$

si trova subito $u = v = \frac{1}{2} a \sqrt{\pi}$. Dunque i due punti assintotici sono vertici opposti d'un quadrato equivalente al circolo di raggio a .

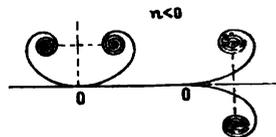
e) Consideriamo più generalmente le curve che hanno la *curvatura proporzionale ad una potenza dell'arco*. Scritta la loro equazione sotto la forma $\rho = ks^n$, si ritrova la spirale logaritmica per $n=1$, la clotoide per $n=-1$, la sviluppante di circolo per $n=\frac{1}{2}$. Mettendo da parte il caso di $n=1$, si vede subito che φ varia come s^{1-n} , ed al coefficiente k , che si può sempre supporre positivo, conviene dar la forma

$$k = \pm \frac{a^{1-n}}{1-n}.$$

Ciò premesso, quando n è compreso fra 0 ed 1, ed è il quoziente d'un numero dispari per un numero pari, si hanno curve analoghe alla sviluppante di circolo, cioè dotate soltanto d'una cuspidine nell'origine degli archi, intorno alla



quale si svolgono a spire sempre meno curve, che vanno ad avvolgere assintoticamente il punto all'infinito. Per gli altri valori razionali di n , compresi fra 0 ed 1, la curva, pur avendo nell'origine un minor contatto con la tangente, vi si comporta come in un punto ordinario, o vi subisce un'inflessione, di guisa che la sua forma generale è ben diversa da quella della sviluppante di circolo. Per n negativo, ed uguale al quoziente di due

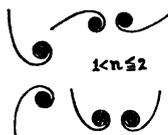


numeri dispari, si hanno curve analoghe alla clotoide, cioè dotate d'un flesso, origine degli archi, e di due punti assintotici; ma, se n è il quoziente d'un numero pari per un numero dispari, o viceversa, la curva, pur toccando maggiormente la tangente nell'origine, si comporta in questa come in un punto ordinario, o vi ammette una cuspidine, e cessa di rassomigliare nel suo insieme alla clotoide, sebbene ciascuna metà rassomigli alla metà d'una clotoide. In ogni caso, adoperando le (10), si riconosce poi che l'origine sta alla distanza

$$a\Gamma\left(\frac{2-n}{1-n}\right)$$

dai punti assintotici, e che la retta che la congiunge a ciascuno di essi è inclinata di $\frac{\pi}{2(1-n)}$ sulla tangente nell'origine stessa. Finalmente, per $n > 1$, si ha, come per la spirale logaritmica ($n=1$), un punto assintotico nell'origine

degli archi; ma il punto assintotico all'infinito sparisce perchè φ non diventa infinito insieme ad s . Per vedere se dal punto all'infinito viene un assintoto, basta adoperare la formola (8), facendovi



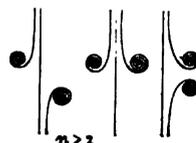
$$\psi = \int \frac{ds}{\rho} = \left(\frac{a}{s}\right)^{n-1}, \quad \rho = \frac{a}{n-1} \psi^{-\frac{n}{n-1}}.$$

Si ottiene subito la distanza al punto assintotico:

$$q = \frac{a}{n-1} \int_0^\infty \psi^{-\frac{n}{n-1}} \operatorname{sen} \psi d\psi.$$

Nelle vicinanze del limite inferiore l'integrale si comporta come $\int \psi^{-\frac{1}{n-1}} d\psi$. Dunque l'assintoto esiste a distanza finita *solo per* $n > 2$, ed in questo caso si trova

$$q = a \Gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right) \cos \frac{\pi}{2(n-1)}.$$



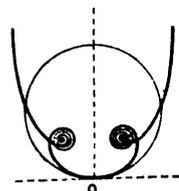
Quando n cresce indefinitamente la curva tende a degenerare in un punto ed una retta, situati alla distanza $q=a$. Ciò avviene per ciascun ramo così: l'arco di lunghezza a , con un estremo nel punto assintotico, tende a raccogliersi in questo punto, mentre la rimanente porzione di curva va a distendersi sull'assintoto.

f) Analoghe alla catenaria (§ 5, b) sono le curve rappresentate dall'equazione

$$\rho = b - \frac{s^2}{a}$$

fantantochè a e b hanno segni opposti. Per $b=-a$ si ritrova la catenaria, giacchè è lecito cambiare il segno di ρ . Per $b=k^2a$ si ottengono invece le *pseudocatenarie*. Quando s è inferiore a ka , in valore assoluto, si trova

$$\varphi = \int_0^s \frac{a ds}{k^2 a^2 - s^2} = \frac{1}{2k} \log \frac{ka+s}{ka-s}.$$



Dunque un primo arco, di lunghezza $2ka$, si avvolge assintoticamente intorno agli estremi. Simmetrico rispetto all'origine, esso è chiuso tutto nel circolo di raggio k^2a , che tocca la curva nell'origine stessa. Siccome si ha

$$s = ka \frac{e^{k\varphi} - e^{-k\varphi}}{e^{k\varphi} + e^{-k\varphi}}, \quad \rho = \frac{4k^2 a}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2},$$

le coordinate d'un punto assintotico, rispetto alla tangente ed alla normale nell'origine, sono

$$u = 4k^2 a \int_0^\infty \frac{\cos \varphi d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \frac{\pi a}{e^{\frac{\pi}{2k}} - e^{-\frac{\pi}{2k}}}, \quad v = 4k^2 a \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \varphi d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \frac{\pi a}{2(e^{\frac{\pi}{4k}} + e^{-\frac{\pi}{4k}})}.$$

Si svolgono poi dai punti assintotici e si estendono all'infinito altri due rami, ana-

loghi a quelli della spirale $s^2 = a\rho$. I loro punti corrispondono ai valori di s superiori a ka , o inferiori a $-ka$. Per ciascun ramo la direzione della tangente è determinata dall'angolo

$$\psi = \int_{s_0}^{\infty} \frac{ads}{s^2 - k^2 a^2} = \frac{1}{2k} \log \frac{s + ka}{s - ka}.$$

I due rami non hanno assintoto a distanza finita, perchè la distanza d'un assintoto al corrispondente punto assintotico, data dalla formola (9), è

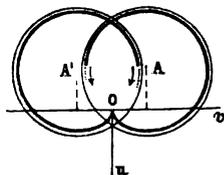
$$q = 4k^2 a \int_0^{\infty} \frac{\text{sen} \psi d\psi}{(e^{2\psi} - e^{-2\psi})^2},$$

e d'altra parte si constata che questo integrale non ha un valore finito osservando che si comporta come $\log \psi$ nelle vicinanze del limite inferiore. Come i due rami infiniti si connettano al ramo finito, nei punti assintotici, non risulta (e, per quanto si è detto in fine del § 4, non può risultare) dalla precedente discussione; ma è facile vedere che, intorno a ciascun punto assintotico, la curva si comporta come la coppia di spirali logaritmiche $\rho^2 = 4k^2 s^2$ intorno al polo comune.

g) Si chiamano *pseudotrattrici* le curve definite dall'equazione

$$\rho = ka \sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}.$$

Questa si confonde con $\rho = k\sqrt{2as}$ nelle vicinanze dell'origine, e però la pseudotrattrice comincia a svolgersi come la sviluppante d'un circolo di raggio $k^2 a$; ma cambia presto contegno, perchè, crescendo s , non cresce indefinitamente ρ , che tende invece a ka . Dunque la curva ammette, corrispondentemente alle due determinazioni di ρ , due circoli assintotici. Siccome, a partire dalla tangente cuspidale, si ha



$$\varphi = \frac{1}{2k} \log \frac{ka + \rho}{ka - \rho},$$

le formole (11) danno

$$u = -4k^2 a \int_0^{\infty} \frac{\text{sen} \varphi d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = -\frac{\pi a}{2(e^{\frac{\pi}{4k}} + e^{-\frac{\pi}{4k}})},$$

$$v = \pm 4k^2 a \int_0^{\infty} \frac{\text{cos} \varphi d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \pm \frac{\pi a}{e^{\frac{\pi}{2k}} - e^{-\frac{\pi}{2k}}}$$

come coordinate dei centri dei circoli assintotici. Il segmento staccato sulla normale cuspidale da una circonferenza assintotica è visto dal centro sotto un angolo che non si può prendere piccolo quanto si vuole. Tale angolo è minimo per un valore di k vicinissimo a 0,655, nel qual caso le distanze dei centri dei circoli assintotici alla normale ed alla tangente cuspidale sono frazioni del raggio, molto vicine ai valori 0,663 e 0,439.

h) Quali curve sono rappresentate da un'equazione quadratica fra s e ρ , priva del termine ρ^2 ? Quando manca sp , l'equazione, se non rappresenta una cop-

pia di punti, è riducibile alla forma $\rho = as^2 + 2bs + c$, e rappresenta pseudocatenarie o curve analoghe alla catenaria secondo che $ac - b^2$ è negativo o positivo. Se non manca sp , all'equazione si può sempre dar la forma

$$\rho = b + ks + \frac{a^2}{s}.$$

Fintantochè k non è nullo, il valore di b non ha grande influenza sulla forma generale della curva. Prendendo dunque $b = 0$ si avrà

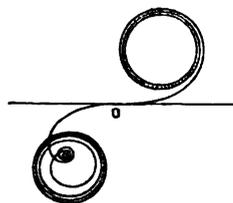
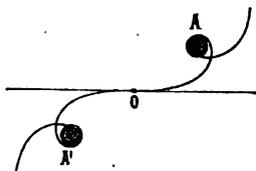
$$\varphi = \frac{1}{2k} \log \left(1 + k \frac{s^2}{a^2} \right).$$

Quando k è positivo, φ cresce indefinitamente insieme ad s ed a ρ . Inoltre ρ diventa infinito anche nell'origine degli archi, intorno al qual punto la curva si comporta come una clotoide ($s\rho = a^2$) nelle vicinanze del punto d'inflessione. La curva s'inflette dunque nell'origine, e dalle due parti di questa si svolge a spire infinite, che tendono a confondersi con una spirale logaritmica ($\rho = ks$). Il raggio di curvatura acquista il minimo valore $a' = 2a\sqrt{k}$ in certi due punti A ed A', ed intorno a ciascuno di questi la curva si comporta quasi come una

catenaria ($\rho = a' + 2k^2 \frac{s}{a}$). Invece, se k è negativo,

nei punti A ed A' la curvatura diventa infinita insieme a φ . Questi punti sono dunque assintotici, ed intorno a ciascuno di essi la curva si comporta come la coppia di spirali $\rho^2 = 4k^2 s^2$ intorno al polo comune. Finalmente, se k (ma non b) è nullo, l'equazione rappresenta una

curva dotata, oltrechè d'un flesso nell'origine, d'una coppia di circoli assintotici (uno interno, l'altro esterno) di raggio b , giacchè, crescendo s indefinitamente in valore assoluto, ρ tende a b , e d'altra parte



$$\varphi = \frac{s}{b} - \frac{a^2}{b^2} \log \left(1 + \frac{bs}{a^2} \right)$$

cresce indefinitamente. Inoltre φ cresce all'infinito anche quando s tende al valore $-a^2/b$. Si ha dunque, a distanza finita dall'origine, un punto assintotico, intorno al quale la curva si comporta come la coppia di spirali $a^4 \rho^2 = b^4 s^2$ intorno al polo comune.

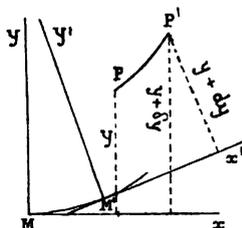
i) Se poi *non manca* il termine ρ^2 , l'equazione è generalmente riducibile, per una conveniente scelta dell'origine, ad una delle seguenti forme:

$$\rho = b + ks \pm k' \sqrt{a^2 - s^2}, \quad \rho = b + ks \pm k' \sqrt{s^2 - a^2}, \quad \rho = b + ks \pm k' \sqrt{s^2 + a^2}.$$

Eccezionalmente, cioè quando i termini del secondo grado costituiscono un quadrato perfetto, all'equazione si può invece dar la forma $\rho = b + ks \pm \sqrt{2as}$. Come casi particolarissimi ($b = 0, k = 0$) si ritrovano la cicloide, le due pseudocicloidi e la sviluppante di circolo. Lasciamo al lettore la cura di compiere, come esercizio, lo studio di tutte queste curve, e di classificarle intorno ad un numero minimo di tipi normali.

II. FORMOLE FONDAMENTALI PER L'ANALISI INTRINSECA DELLE CURVE PIANE.

1. D'ora innanzi assumeremo costantemente come assi la tangente e la normale alla curva in un punto qualunque M . Si consideri un punto P , mobile con M : sia P' la sua posizione quando l'origine M si è trasferita in M' ; siano x ed y le coordinate di P , $x + \delta x$ ed $y + \delta y$ quelle di P' , rispetto agli assi di origine M . In generale, quando dai primi assi si passa a quelli di origine M' , le coordinate x ed y variano; esse sono dunque funzioni di s , ed è chiaro che, se M' è infinitamente vicino ad M , le coordinate di P' rispetto agli assi di origine M' sono $x + dx, y + dy$. Ora, se rappresentiamo con u, v e con $\delta\varphi$ le coordinate di M' rispetto ai primi assi e l'angolo di cui ruota l'asse x nel passare dalla prima alla seconda posizione, si ha



$$\begin{aligned} x + dx &= u + (x + \delta x) \cos \delta\varphi - (y + \delta y) \sin \delta\varphi = u + x + \delta x - y\delta\varphi, \\ y + dy &= v + (x + \delta x) \sin \delta\varphi + (y + \delta y) \cos \delta\varphi = v + y + \delta y + x\delta\varphi, \end{aligned}$$

cioè, dividendo per $\delta s = ds$, e ricordando le prime tre uguaglianze del precedente capitolo,

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho}. \quad (1)$$

Son queste le *formole fondamentali*, dalle quali, ponendovi δx e δy uguali a zero, cioè supponendo che P' coincida con P , derivano immediatamente le importanti condizioni

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho}, \quad (2)$$

necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (x, y) . In coordinate polari ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) queste condizioni diventano

$$\frac{dr}{ds} = -\cos \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin \theta}{r}. \quad (3)$$

Se poi si vuole che la retta definita dalla sua distanza q all'origine e dall'angolo φ , di cui deve ruotare la sua direzione positiva per confondersi

con quella della tangente, sia immobile nel piano, bisogna esprimere che l'equazione della retta

$$x \operatorname{sen} \varphi + y \operatorname{cos} \varphi + q = 0$$

è soddisfatta da infinite soluzioni delle (2). E poichè si ottiene, derivando,

$$(x \operatorname{cos} \varphi - y \operatorname{sen} \varphi) \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\rho} \right) - \operatorname{sen} \varphi + \frac{dq}{ds} = 0 ,$$

questa relazione deve scindersi nelle altre (evidenti geometricamente)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} , \quad \frac{dq}{ds} = \operatorname{sen} \varphi \quad (4)$$

necessarie e sufficienti per l'immobilità della retta (φ, q).

2. Prima di andare oltre notiamo alcune conseguenze delle formole (3) e (4). Supponiamo che, crescendo s all'infinito, la distanza di M ad un punto fisso P tenda verso un limite finito a . Le coordinate r e θ di P soddisfano alle (3), e siccome r tende ad a , la sua derivata non può tendere ad un limite diverso da zero; quindi, se un tal limite esiste, la prima delle (3) dà $\lim \theta = \frac{1}{2}\pi$. Ora la medesima considerazione si può applicare a θ , e però la seconda formola (3) dà $\lim \rho = a$. Dunque il circolo di raggio a , col centro in P , è un circolo assintotico della curva. Inversamente, quando la curva ammette un circolo assintotico, la distanza di M al centro del circolo non può tendere ad un limite diverso dal raggio del circolo, altrimenti esisterebbe un limite di ρ , diverso dal primo. Se poi si osserva che le coordinate del centro di curvatura sono $r = \rho, \theta = \frac{1}{2}\pi$, e che la prima tende ad a , si vede che, crescendo r all'infinito, *il centro di curvatura tende a collocarsi nel centro del circolo assintotico*. Questa osservazione colma una lacuna lasciata nel primo capitolo (§ 10) e conduce ad una più precisa conoscenza dei circoli assintotici. Analogamente la seconda formola (4) permette di fare un'osservazione utile per la ricerca degli assintoti, perchè se q tende, per s infinito, al limite zero, φ non può avere altro limite, vale a dire che, *se la tangente ammette una posizione limite, questa è necessariamente la retta fissa considerata* (cfr. I, 7).

3. Dalle formole (2) e (4) emerge il seguente notevole fatto, fondamentale per la Geometria intrinseca: i parametri atti a fissare i punti e le rette del piano sono funzioni di s , *le cui derivate si esprimono mediante le funzioni stesse*. Così le (2) mostrano che le prime derivate delle coordinate x, y d'un punto fisso sono funzioni lineari delle stesse coordinate, ed altrettanto si può affermare per le successive derivate, come si riconosce derivando ed applicando ripetutamente le (2). Ciò premesso, quando si cercano le curve che hanno una data proprietà, si è generalmente condotti

ad una relazione

$$f(x, y, x', y', \dots, \varphi, \varrho, \varphi', \varrho', \dots, s) = 0,$$

che involge un certo numero di coordinate di punti e di rette, fissi nel piano, e che deve aver luogo qualunque sia s . Ora è chiaro che basta derivare la detta relazione per ottenerne subito un'altra fra le medesime coordinate, facendo scomparire le derivate delle coordinate mercè le condizioni d'immobilità. Si viene in tal modo non solo a scoprire una nuova proprietà delle curve incognite, ma, continuando a derivare, si riuscirà sempre a costituire un sistema di relazioni, tale che sia possibile eliminarne le coordinate x, y, x', \dots . Bisognerà poi integrare l'equazione differenziale, risultante dall'eliminazione, per trovare l'equazione intrinseca delle curve richieste.

4. Luoghi geometrici. Supponendo conosciute le coordinate x, y d'un punto P in funzione di s , come si procede per determinare il luogo di P ? Le formole fondamentali forniscono subito i valori di δx e δy ; poi si ha, per esprimere l'arco elementare di (P) , $ds'^2 = \delta x^2 + \delta y^2$, vale a dire

$$s' = \int \kappa ds, \quad (5)$$

dove si è posto

$$\kappa^2 = \left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1 \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} \right)^2.$$

Determinata l'inclinazione θ della tangente, in P , alla linea incognita (P) , sull'asse x , mediante la formola $\operatorname{tg} \theta = \delta y : \delta x$, si osservi che le inclinazioni della tangente a (P) , in P' , sulle tangenti alla linea (M) , in M ed M' , sono $\theta + \delta\varphi'$ e $\theta + d\theta$, dimodochè si ha $\delta\varphi' = \delta\varphi + d\theta$, e però, dividendo per ds ,

$$\frac{\kappa}{\rho} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{ds}, \quad (6)$$

purchè il senso positivo della normale a (P) si stabilisca in modo che, facendo ruotare la direzione positiva della tangente finchè coincida con quella dell'asse x , coincidano anche le direzioni positive della normale e dell'asse y . Finalmente basta eliminare s fra (5) e (6) per ottenere l'equazione intrinseca di (P) .

5. Inviluppi. L'equazione $f(x, y, s) = 0$ rappresenta, in generale, una semplice infinità di linee, ciascuna delle quali corrisponde ad un determinato punto della linea (M) . Le linee corrispondenti ai punti M ed M' , infinitamente vicini, possono aver comuni uno o più punti, i quali si debbono considerare come fissi nel passaggio dell'origine da M ad M' . Le coordinate di tali punti si ottengono dunque derivando l'equazione $f = 0$ e supponendo soddisfatte le condizioni (2), esse sono cioè le soluzioni del sistema

$$f(x, y, s) = 0, \quad \left(\frac{y}{\rho} - 1 \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{x}{\rho} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} = 0. \quad (7)$$

Conosciute così x ed y in funzione di s , basterà applicar loro il procedimento esposto nel paragrafo precedente per ottenere l'equazione intrinseca del luogo dei predetti punti d'incontro. È questo luogo che si chiama *inviluppo* delle linee $f=0$. Può tuttavia accadere che le (7) si riducano ad una sola equazione, ed allora si ha una curva sola, come avviene, per esempio, quando $f=0$ è l'equazione della stessa (M). Di questa osservazione ci gioveremo in seguito.

6. Si dimostra facilmente che *l'inviluppo tocca tutte le linee inviluppate*. Sia infatti P un punto comune alle due linee $f=0$, corrispondenti a due punti M ed M', infinitamente vicini sulla curva (M). Siano θ e θ' le inclinazioni sull'asse x delle tangenti in P all'inviluppo ed all'inviluppata. Evidentemente, fissato s , il valore di $\text{tg } \theta'$ è dato dal rapporto $\delta y : \delta x$, che si ricava dalla relazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0 .$$

Invece θ si determina col procedimento indicato nel § 4, dimodochè si ha

$$\text{tg } \theta = \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} \right) : \left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1 \right) , \quad \text{tg } \theta' = - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} ,$$

con x ed y soddisfacenti alle (7). Ora, se si forma $\text{tg}(\theta - \theta')$, si ottiene al numeratore l'espressione

$$\left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1 \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} \right) \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \left(\frac{y}{\rho} - 1 \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{\rho} \frac{\partial f}{\partial y} ,$$

e questa, in virtù delle (7), si riduce a

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{df}{ds} = 0 .$$

Dunque $\theta = \theta'$.

7. **Esercizii:** a) Per trovare l'equazione intrinseca d'una circonferenza di raggio a , cioè del luogo dei punti che distano di a da un punto fisso (centro), si può procedere nel seguente modo. Se x ed y sono le coordinate del centro, si deve avere sempre $x^2 + y^2 = a^2$; poi derivando, ed osservando le (2), $x=0$. Dunque, intanto, *tutte le normali concorrono nel centro*. Derivando ancora si ottiene $y=\rho$; quindi, sostituendo x ed y nella prima relazione, $\rho=a$.

b) Per trovare tutte le linee che hanno la curvatura costante basta osservare che, quando ρ è costante, le condizioni (2) sono soddisfatte dal punto ($x=0, y=\rho$). Dunque questo punto è fisso, e la curva è necessariamente una circonferenza di raggio ρ , giacchè tutti i suoi punti si trovano alla distanza costante ρ dal punto fisso ($0, \rho$).

c) *Quale curva incontra sotto un angolo costante θ tutte le rette uscenti da un punto?* Applicando le (3) alle coordinate polari ($r, \pi - \theta$) del punto fisso

si ottiene

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta \quad , \quad 0 = -\frac{1}{\rho} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} .$$

Dalla prima si deduce $r = s \cos \theta$, convenendo di contare gli archi a partire dal punto fisso. Sostituendo nella seconda si trova $\rho = s \cot \theta$, equazione (I, 11, b, c) d'una spirale logaritmica.

d) Qual'è la curva che ha le normali (fra i punti d'incidenza ed i centri di curvatura) tagliate per metà da una retta? Bisogna esprimere che il punto $(x=0, y=1/2\rho)$ descrive una retta. Ora le (1) danno

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d\rho}{ds} ;$$

poi $\operatorname{tg} \theta = \frac{d\rho}{ds}$, e la (6) mostra che si deve avere

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} \quad , \quad (8)$$

come del resto risulta subito dall'osservare che, nel caso d'una retta fissa, θ differisce dalla solita φ solo nel segno. Dunque, successivamente,

$$\operatorname{tg} \theta \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \quad , \quad \log \cos \theta = \log \rho + \text{costante} \quad , \quad \rho = a \cos \theta ;$$

poi, integrando (8), dopo avere invertito il senso nel quale si contano gli archi, e fissando convenientemente l'origine,

$$s = \int \rho d\theta = a \operatorname{sen} \theta .$$

Dunque $s^2 + \rho^2 = a^2$, vale a dire (I, 8, c) che la proprietà enunciata caratterizza la cicloide.

e) Trovare una curva che abbia i centri di curvatura simmetrici, rispetto alla curva stessa, dei punti nei quali le normali sono incontrate da una retta. Ora è il punto $(x=0, y=-\rho)$ che deve muoversi lungo una retta. Ripetendo i calcoli del precedente esercizio si ottiene, successivamente,

$$\frac{\delta x}{ds} = 2 \quad , \quad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{d\rho}{ds} \quad , \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{2} \frac{d\rho}{ds} ;$$

poi

$$\operatorname{tg} \theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2\rho} \frac{d\rho}{ds} \quad , \quad \log \cos \theta = -\log \sqrt{\rho} + \text{costante} \quad , \quad \rho = \frac{a}{\cos^2 \theta} ,$$

e finalmente, invertendo il senso nel quale si contano gli archi,

$$s = \int \rho d\theta = a \operatorname{tg} \theta \quad , \quad \rho = a + \frac{s^2}{a} .$$

Questa è (I, 5, b) l'equazione d'una catenaria.

f) Trovare una curva tale, che il segmento di tangente staccato da una retta, a partire dal punto di contatto, sia costante. Qui si tratta di esprimere che il punto $(x=a, y=0)$ descrive una retta. Ora si ha

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{a}{\rho} \quad , \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{a}{\rho} .$$

Dall'ultima eguaglianza, posta, mercè (8), sotto la forma

$$\cot\theta \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{a},$$

si deduce subito, successivamente,

$$\log \operatorname{sen} \theta = -\frac{s}{a}, \quad \rho = a \cot \theta = a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1},$$

si ottiene cioè (I, 8, b) l'equazione intrinseca d'una *trattrice*.

g) *Trovare una curva che abbia, in ogni punto, il raggio di curvatura uguale al segmento staccato sulla normale da due rette parallele.* In altri termini, se a è la distanza delle due rette, la proiezione del raggio di curvatura sopra una retta fissa dev'essere costantemente uguale ad a , dimodochè $a = \rho \operatorname{sen} \varphi$. Per esprimere l'invariabilità della direzione della retta si ha

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{a};$$

quindi

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a}, \quad \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{a}, \quad \rho = \frac{a}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{a}{2} (e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}).$$

La curva cercata è dunque (I, 5, c) una *catenaria di eguale resistenza*.

h) *Quali curve hanno nel loro piano un punto tale, che la proiezione del raggio vettore sulla tangente è proporzionale all'arco?* Bisogna che per una soluzione (x, y) delle (2) sia $x = ks$. Ora la prima condizione (2) mostra che dev'essere anche $y = (k+1)\rho$, e la seconda conduce ad un'equazione, che dà, integrata,

$$ks^2 + (k+1)\rho^2 = \text{costante}.$$

Se la costante si prende uguale a zero si ottiene una coppia di spirali logaritmiche; altrimenti si ha un'epicloide ($k > 0$), un'ipocicloide ($k < -1$), o (per k compreso fra 0 e -1) una curva del tipo pseudocicloideale (I, 8, d). Data alla equazione della curva la forma

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1,$$

si trova facilmente il valore di k ; poi si ha

$$x = \frac{b^2 s}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{a^2 \rho}{a^2 - b^2}.$$

Per dimostrare che queste sono le coordinate del centro P della circonferenza direttrice (I, 8, c) basta osservare che y si annulla insieme a ρ , vale a dire che il punto trovato è quello in cui concorrono le tangenti cuspidali. Del resto si trova, inoltre, che x diventa uguale appunto al raggio della direttrice.

i) *Per trovare tutte le curve simili ad una data curva* basta osservare che se, rispetto alla curva data, r e θ sono le coordinate polari del centro di similitudine, rispetto a qualunque curva simile la prima coordinata viene ad essere moltiplicata per una costante k , mentre l'altra rimane inalterata. Le condizioni (3) diventano

$$k \frac{dr}{ds} = -\cos \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{kr};$$

quindi occorre che sia $s' = ks$, $\rho' = k\rho$. Adunque si ottengono le curve simili ad una curva data moltiplicando, nell'equazione di questa curva, s e ρ per una costante arbitraria. In particolare si noti che, procedendo in tal guisa per le equazioni $\rho^2 = 2as$, $s^2 + \rho^2 = a^2$, ecc., si riesce soltanto a cambiare il valore di a . Dunque le sviluppanti di circolo son tutte curve simili fra loro, ed altrettanto si può dire delle cicloidi, delle catenarie, ecc. Invece ogni equazione lineare fra s e ρ rimane sostanzialmente inalterata, e però le curve simili ad una data spirale logaritmica son tutte sovrapponibili alla spirale stessa. In altri termini le spirali logaritmiche hanno la singolare proprietà di *non deformarsi quando si dilatano* (egualmente in tutte le direzioni) intorno ad un punto qualunque. Per esse la dilatazione si risolve in una traslazione, seguita da una rotazione intorno alla nuova posizione del polo.

j) Come due curve (simili) si possono disporre in modo che in due punti M ed M' , in linea retta con un punto fisso P , le tangenti siano *parallele*, così può accadere che per due curve le tangenti nei punti M ed M' , allineati con P , siano invece *antiparallele* rispetto ad MM' . Allora le curve si dicono *inverse*, e P è il *centro d'inversione*. Le coordinate polari di P siano (r, θ) rispetto alla curva (M) , ed (r', θ') rispetto ad M' . Evidentemente $\theta' = \pi - \theta$ se si conviene che M ed M' debbano percorrere le rispettive curve nello stesso senso per conservarsi in linea retta con P , e se la normale ad (M') si dirige secondo la convenzione fatta nel § 4. Ora, osservando che l'inclinazione della tangente ad (M') sulla tangente ad (M) è 2θ , la formola (6) dà

$$\frac{x}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + 2 \frac{d\theta}{ds} = \frac{\text{sen } \theta}{r} + \frac{d\theta}{ds}.$$

D'altra parte le condizioni (3) diventano, per la curva (M') ,

$$\frac{dr'}{ds} = x \cos \theta, \quad \frac{x}{\rho'} = \frac{x \text{ sen } \theta}{r'} + \frac{d\theta}{ds},$$

e paragonando quest'ultima alla prima relazione ottenuta si vede che $x = r':r$, come del resto risulta subito da una considerazione geometrica semplicissima. Ciò premesso, si ha

$$\frac{dr'}{ds} = \frac{r'}{r} \cos \theta = - \frac{r'}{r} \frac{dr}{ds},$$

e però, integrando, $rr' = a^2$. Il circolo di raggio a , col centro in P , è il circolo fondamentale dell'inversione: sulla sua circonferenza cadono necessariamente tutti i punti d'incontro delle due curve, giacchè non può r diventare uguale ad a senza che altrettanto avvenga di r' . Finalmente, portando il valore di x nella prima relazione, si ottiene

$$\frac{r}{\rho} + \frac{r'}{\rho'} = 2 \text{sen } \theta,$$

e l'interpretazione geometrica di questa eguaglianza mostra che anche i *centri di curvatura, in due punti corrispondenti, sono allineati col centro d'inversione*.

k) L'inversione non differisce sostanzialmente dalla trasformazione d'indice — 1. La *trasformazione d'indice ν* consiste nel far corrispondere ad un punto dato un altro punto, che abbia l'affisso proporzionale alla ν^{ma} potenza dell'affisso

del primo punto. Procedendo come per l'inversione si riesce facilmente a dimostrare che le tangenti in due punti corrispondenti concorrono sulla circonferenza determinata dai punti stessi e dal polo, e si trovano le relazioni

$$a^{v-1}s' = v \int r^{v-1} ds \quad , \quad a^{v-1}\rho' = \frac{vr^v\rho}{r + (v-1)\rho \operatorname{sen} \theta} \quad ,$$

dalle quali si può, eliminando s , dedurre l'equazione intrinseca della trasformata d'indice v di qualunque curva.

l) Data una curva, trovarne la pedale rispetto ad un punto, cioè il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate da un punto fisso P sulle tangenti alla curva. Se si applicano le formole (1) alle coordinate $x = r \cos \theta$, $y = 0$ della proiezione M' di P sulla tangente, si ottiene

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{r}{\rho} \operatorname{sen} \theta \quad , \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{r}{\rho} \cos \theta \quad ;$$

poi $\delta y : \delta x = \cot \theta$. Ne segue che la normale alla pedale è antiparallela a PM rispetto alla tangente ad (M), e però essa divide per metà il raggio vettore PM. Inoltre si vede che $x = r : \rho$, e però la formola (6), se si ha cura di cambiarvi θ in $\frac{1}{2}\pi - \theta$, diventa

$$\frac{r}{\rho\rho'} = \frac{1}{\rho} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{2}{\rho} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \quad .$$

Dunque l'equazione intrinseca della pedale risulta dall'eliminazione di s fra le uguaglianze

$$s' = \int \frac{r}{\rho} ds \quad , \quad \rho' = \frac{r^2}{2r - \rho \operatorname{sen} \theta} \quad .$$

Se, per esempio, la curva data è una circonferenza di raggio a , e se P appartiene alla circonferenza, diguisachè $\rho = a$, $s = 2a\theta$, $r = 2a \operatorname{sen} \theta$, dalle ultime formole si ricava successivamente

$$s' = 4a \int \operatorname{sen} \theta d\theta = -4a \cos \theta \quad , \quad \rho' = \frac{4a}{3} \operatorname{sen} \theta \quad , \quad s'^2 + 9\rho'^2 = 16a^2 \quad .$$

Dunque (I, 8, c) la pedale cercata è una *cardioide*. Osserviamo, per finire, che la espressione di ρ' conduce alla seguente semplicissima costruzione del centro di curvatura C': se la proiezione H del centro di curvatura della data curva sul raggio vettore si proietta in N, sulla normale, la retta PN contiene il centro di curvatura della pedale. Infatti, se L è la proiezione di P sulla normale, e Q il punto d'incontro del raggio vettore con LM' (normale alla pedale) la trasversale PC'N nel triangolo LMQ dà

$$\frac{r - \rho'}{\rho' - \frac{1}{2}r} = \frac{LC'}{QC'} = \frac{PM}{PQ} \cdot \frac{LN}{MN} = 2 \frac{r - \rho \operatorname{sen} \theta}{\rho \operatorname{sen} \theta} \quad ; \quad \text{ecc.}$$

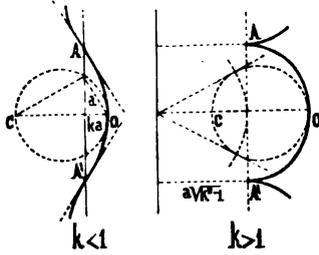
m) Sono importanti le curve che hanno la curvatura proporzionale al segmento di normale, compreso fra il punto d'incidenza ed una retta fissa. In altri termini per tali curve il rapporto $q\rho : \cos \varphi$ ha un valore costante. Prima supporremo che questo sia negativo, diguisachè si possa scrivere, in virtù delle (4),

$$q = -\frac{a^2}{\rho} \cos \varphi = -a^2 \frac{d}{ds} \operatorname{sen} \varphi = -a^2 \frac{d^2 q}{ds^2} \quad .$$

Ne segue, fissando convenientemente l'origine degli archi, $q = ka \cos \frac{s}{a}$, dove k rappresenta una costante arbitraria, che si può sempre supporre positiva. La derivazione dà per $\text{sen} \varphi$ il valore $-k \text{sen} \frac{s}{a}$, e queste tre relazioni

$$q = ka \cos \frac{s}{a}, \quad \text{sen} \varphi = -k \text{sen} \frac{s}{a}, \quad \rho = -\frac{a^2}{q} \cos \varphi,$$

bastano per rendersi conto della forma delle curve. Nell'origine ($s=0$) si ha $\varphi=0$, $q=ka$, $\rho=-a:k$. Dunque la curva esce dall'origine, nei due sensi, parallelamente alla retta fissa,



alla quale si va sempre più accostando a misura che s cresce. Se $k < 1$, si può far variare s fino a $\pm \frac{1}{2} \pi a$, ed allora si ha $\text{sen} \varphi = \mp k$, $q=0$, $\rho=\infty$, vale a dire che la curva finisce per attraversare la retta inflettendosi. La retta spezza dunque la curva in infiniti archi uguali, di lunghezza πa , ciascuno dei quali termina sulla retta stessa

in due punti d'inflessione; e le tangenti in questi punti si costruiscono osservando che son parallele alle corde (di lunghezza a) che vanno dall'origine O ai punti d'incontro della retta con la circonferenza descritta sul raggio di curvatura in O come diametro. Se $k > 1$, s non può raggiungere $\pm \frac{1}{2} \pi a$, perchè il valore assoluto di $\text{sen} \varphi$ non può superare l'unità. Appena, crescendo s , si ha $\text{sen} \frac{s}{a} = \pm \frac{1}{k}$, φ diventa uguale a $\mp \frac{1}{2} \pi$, e ρ si annulla, mentre q prende il valore $a \sqrt{k^2 - 1}$. Si hanno dunque infiniti archi uguali, ciascuno dei quali termina in due cuspidi, ed il luogo delle infinite cuspidi è una parallela alla retta data. L'equazione intrinseca si ottiene facilmente sostituendo a φ ed a q i loro valori nell'espressione di ρ :

$$\rho = \frac{a}{k} \sqrt{1 + (1 - k^2) \text{tg}^2 \frac{s}{a}}.$$

Fra l'uno e l'altro tipo di curve sta il circolo, che corrisponde a $k=1$. Dall'equazione intrinseca si deduce che nel dominio dell'origine queste curve si comportano come se la loro equazione fosse

$$\rho = \frac{a}{k} + \frac{1 - k^2}{2k} \frac{s^2}{a},$$

hanno cioè un contegno di catenaria quelle del primo tipo, e di pseudocatenaria quelle del secondo. Queste ultime poi nel dominio d'una cuspidi si comportano come la sviluppante d'un circolo di raggio $a: \sqrt{k^2 - 1}$, ed invece le prime, nel dominio d'un punto d'inflessione, come la clotoide $s\rho = \frac{a^2}{k} \sqrt{1 - k^2}$.

n) Se la costante è positiva, si trova che q deve soddisfare all'equazione differenziale $q = a^2 \frac{d^2 q}{ds^2}$, e deve per conseguenza avere la forma

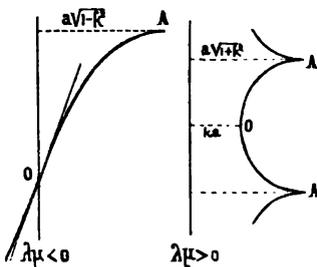
$$q = \lambda e^{\frac{s}{a}} + \mu e^{-\frac{s}{a}},$$

con λ e μ costanti arbitrarie. Se ad una delle costanti si dà il valore 0, si ritrova la trattrice. Supponiamo dunque che λ e μ non siano nulli. Allora si potrà, con

opportuna scelta dell'origine, cambiare i valori delle costanti, e far sì che diventino uguali fra loro almeno in valore assoluto: basterà dare all'origine lo spostamento $\frac{1}{2}a \log\left(\mp \frac{\mu}{\lambda}\right)$ lungo la curva. Avremo dunque due tipi di curve, secondo che si prende il segno superiore o il segno inferiore nelle formole

$$q = \frac{k\alpha}{2} (e^{\frac{s}{a}} \mp e^{-\frac{s}{a}}) , \quad \text{sen } \varphi = \frac{k}{2} (e^{\frac{s}{a}} \pm e^{-\frac{s}{a}}) , \quad \rho = \frac{\alpha^2}{q} \cos \varphi .$$

Facendo $s=0$ si riconosce che le curve del primo tipo hanno l'origine sulla retta fissa, ed ivi s'inflettono; per quelle del secondo, invece, l'origine sta fuori della retta, ma è sempre il punto più vicino ad essa. La tangente nell'origine delle curve del primo tipo fa con la retta un angolo che ha il seno k (e però dev'essere $k < 1$), mentre per le curve del secondo tipo la tangente è parallela alla retta fissa. Intanto per nessuna di queste curve s può crescere indefinitamente, perchè il valore assoluto di $\text{sen } \varphi$ non può superare l'unità, e però s può variare soltanto fino al valore



$$s = a \log \frac{1 + \sqrt{1 \mp k^2}}{k} ,$$

ed allora è $q = a\sqrt{1 \mp k^2}$, $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi$, $\rho = 0$, cioè si ha una cuspide, in cui la tangente è perpendicolare alla retta fissa, e le infinite cuspidi analoghe stanno tutte sulla parallela condotta alla retta fissa, alla distanza $a\sqrt{1 \mp k^2}$.

8. Curve parallele. Diconsi *parallele* due curve che hanno le medesime normali. Per esprimere che il punto (x, y) descrive una curva parallela alla curva (M) basta porre $x=0$ e $\delta y=0$. Allora le (1) diventano

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{y}{\rho} , \quad \frac{dy}{ds} = 0 . \quad (9)$$

La seconda eguaglianza mostra che y deve avere un valore costante a , e però due curve parallele sono anche *equidistanti*. Inversamente, se una curva taglia segmenti uguali ad a sulle normali ad un'altra, a partire dai punti d'incidenza, le due curve sono parallele, perchè applicando le (1) al punto $(x=0, y=a)$ si ottiene $\delta y=0$. La prima eguaglianza (9), se si osserva che $ds' = \delta x$, dà $s' = s - a\varphi$; e dalla (6), poichè $\theta=0$, si trae $\rho' = \rho - a$. Dunque due curve parallele hanno gli stessi centri di curvatura. Per avere l'equazione intrinseca delle infinite parallele ad una data curva basta eliminare s fra le equazioni $s' = s - a\varphi$, $\rho' = \rho - a$. È utile osservare che all'equazione d'una famiglia di curve parallele si può sempre dare la forma

$$s = \int \frac{f(\rho + a)}{\rho + a} \rho d\rho \quad (10)$$

determinando convenientemente la funzione f . Si ha infatti, per $a=0$,

$$s = \int f(\rho) d\rho , \quad \varphi = \int \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho ;$$

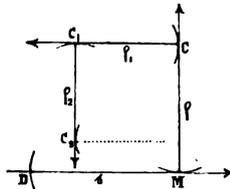
quindi

$$s' = s - a\varphi = \int \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) f(\rho) d\rho = \int \frac{f(\rho' + a)}{\rho' + a} \rho' d\rho' .$$

9. Sviluppata e sviluppanti. Si chiama *sviluppata* d'una curva l'involuppo delle sue normali. Siccome queste sono anche normali ad ogni altra curva parallela, si vede che una stessa curva è sviluppata di tutta una famiglia di curve parallele: queste si chiamano *sviluppanti* della curva considerata. Ciò premesso, l'equazione della normale ($x=0$), derivata, dà $y=\rho$. Dunque *la sviluppata d'una curva piana è il luogo dei suoi centri di curvatura*: proprietà evidente geometricamente (cfr. I, 2). Per trovare l'equazione intrinseca della sviluppata d'una data curva (M) bisogna applicare le (1) alle coordinate $x=0$, $y=\rho$ del punto C, centro di curvatura di (M), in M.

Si ottiene

$$\frac{\delta x}{ds} = 0 \quad , \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{d\rho}{ds} ; \quad (11)$$



poi, distinguendo con un indice 1 tutto ciò che si riferisce alla sviluppata, $ds_1 = \delta y = d\rho$. Dunque, fissando convenientemente l'origine degli archi, $s_1 = \rho$. Ne

segue che *ogni arco di curva è uguale alla differenza delle tangenti estreme, limitate fra i punti di contatto ed una sviluppata qualunque*. Quindi è chiaro che, se un filo inestendibile, primitivamente avvolto sopra una curva, si svolge nel piano in modo da mantenersi sempre teso, i suoi punti descriveranno le infinite sviluppanti della curva considerata. Finalmente, essendo $\theta = \frac{1}{2}\pi$, dalla (6) si deduce $\rho_1 ds = \rho d\rho$. Dunque *l'equazione intrinseca della sviluppata d'una curva data si ottiene eliminando s fra le equazioni*

$$s_1 = \rho \quad , \quad \rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds} . \quad (12)$$

10. Qui vogliamo osservare che, quando s cresce all'infinito, se la curva che si considera va ad avvolgere assintoticamente un circolo di centro P, le (11) tendono a diventare le condizioni d'immobilità del centro di curvatura: ciò è conforme a quanto si è visto nel § 2. Inoltre la seconda delle (12) dà $\lim \rho_1 = 0$, e siccome la funzione φ , relativa alla sviluppata, cresce indefinitamente come quella relativa alla curva data (che ne differisce solo per una costante) la sviluppata ha in P un punto assintotico. Adunque i centri dei circoli assintotici d'una curva sono punti assintotici della sviluppata. Le identiche circostanze analitiche si presentano quando, in un punto a tangente determinata, ρ è minimo o massimo. Allora, in generale, la sviluppata subisce un regresso. Di tutto ciò è facile rendersi conto geometricamente (cfr. I, 6, 9).

11. La sviluppata della sviluppata d'una curva si chiama *seconda sviluppata* della curva stessa; la sviluppata della seconda sviluppata è la *terza*

svilupata; ecc. Siano s_n e ρ_n l'arco ed il raggio di curvatura della n^{ima} sviluppata di (M), in un dato punto M. Applicando le (12) alla $(n-1)^{\text{ima}}$ sviluppata, si ottiene

$$s_n = \rho_{n-1} \quad , \quad \rho_n = \rho_{n-1} \frac{d\rho_{n-1}}{ds_{n-1}} = \rho_{n-1} \frac{ds_n}{ds_{n-1}} \quad ,$$

dimodochè

$$\frac{ds_n}{\rho_n} = \frac{ds_{n-1}}{\rho_{n-1}} = \dots = \frac{ds}{\rho} \quad ;$$

quindi

$$\rho_n = \rho \frac{d}{ds} \rho_{n-1} \quad . \quad (13)$$

Dunque, dato un termine qualunque della successione $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ di funzioni di s , basta prenderne la derivata, e moltiplicarla per ρ , per ottenere il termine seguente. Più semplicemente, se si assume come variabile indipendente la funzione φ , comune alla curva ed a tutte le sue sviluppate, si riconosce subito, ponendo $\rho d\varphi$ per ds in (13), che $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ sono le successive derivate di ρ rispetto a φ .

12. Terminiamo con un'osservazione non priva d'interesse. Se, in un punto M, i centri di curvatura C, C_1, C_2, C_3, \dots tendono ad un punto limite P, questo è lo stesso per tutti gli altri punti di (M), almeno in tutto un arco convenientemente determinato intorno ad M. Infatti, ammettere l'esistenza della posizione limite P equivale a supporre che le serie

$$x = -\rho_1 + \rho_2 - \rho_3 + \dots \quad , \quad y = \rho - \rho_2 + \rho_4 - \dots \quad (14)$$

sono convergenti: le somme di tali serie sono appunto le coordinate di P. Intanto si ha, applicando la formola (13),

$$\rho \frac{dx}{ds} = -\rho_2 + \rho_4 - \rho_6 + \dots = y - \rho \quad , \quad \rho \frac{dy}{ds} = \rho_1 - \rho_3 + \rho_5 - \dots = -x \quad ,$$

vale a dire che le condizioni (1) sono soddisfatte. Dunque il punto P è fisso nel piano della curva.

13. **Esercizii:** a) Qual'è la sviluppata della trattrice? Scritta l'equazione della trattrice sotto la forma

$$\rho^2 + a^2 = a^2 e^{\frac{2s}{a}} \quad ,$$

si ottiene, derivando,

$$\rho_1 = a e^{\frac{2s}{a}} = a + \frac{\rho^2}{a} = a + \frac{s_1^2}{a} \quad .$$

La curva cercata è dunque una catenaria.

b) Operando analogamente sull'equazione $k^2 a^3 - \rho^2 = k^2 a^3 e^{-\frac{2s}{a}}$ si ottiene

$$\rho_1 = k^2 a e^{-\frac{2s}{a}} = k^2 a - \frac{\rho^2}{a} = k^2 a - \frac{s_1^2}{a} \quad .$$

Dunque (I, 11, f, g) la pseudocatenaria è sviluppata d'una pseudotrattrice.

c) Vogliamo trovare le curve attraversanti ad angolo costante infinite circonferenze uguali, che hanno i centri sopra una retta. Evidentemente le coordinate del centro d'un circolo, rispetto alla tangente ed alla normale nel corrispondente punto della curva incognita, hanno valori costanti a e b . Pertanto dalle (1) si deduce

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{b}{\rho} \quad , \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{a}{\rho} \quad , \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{a}{\rho - b} ;$$

quindi

$$s = - \int \rho d\theta = \int \frac{a\rho d\rho}{(\rho - b)^2 + a^2} .$$

Ora serviamoci della formola (10) per determinare la parallela condotta alla curva incognita, alla distanza b . Si trova

$$s = \int \frac{a\rho d\rho}{\rho^2 + a^2} = \frac{a}{2} \log(\rho^2 + a^2) + \text{costante} \quad , \quad \text{cioè } \rho = a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \quad ,$$

e però le curve cercate sono parallele ad una trattrice. Esse sono dunque *le infinite sviluppanti della catenaria*.

d) La sviluppata della spirale logaritmica si ottiene immediatamente derivando l'equazione intrinseca $\rho = ks$. Si trova $\rho_1 = k\rho = ks_1$; poi, analogamente, $\rho_2 = ks_2$, ecc. Dunque *la spirale logaritmica è uguale a tutte le sue sviluppate*. Inoltre, se si osserva che si ha $\rho_n = k^{n+1}s$, si vede che, per k inferiore ad 1, in valore assoluto, le formole (14) danno

$$x = - \frac{k^2 s}{1 + k^2} \quad , \quad y = \frac{ks}{1 + k^2} .$$

Il punto P, di cui si è parlato nel § 12, è dunque, nel caso attuale, il polo (I, 11, b) stesso della curva.

e) Anche *la cicloide è uguale alle sue sviluppate*. Infatti da $s^2 + \rho^2 = a^2$ si ricava, derivando, $\rho_1 = -s$; e, poichè $s_1 = \rho$, si ha $s_1^2 + \rho_1^2 = a^2$. Invece da $s^2 - \rho^2 = \pm a^2$ si deduce $s_1^2 - \rho_1^2 = \mp a^2$. Dunque due (I, 8, d) pseudocicloidi di egual parametro e di specie diversa sono tali che *ciascuna è la sviluppata dell'altra*. Ne segue che *ogni pseudocicloide è uguale alle sue sviluppate di ordine pari*.

f) Più generalmente, dall'equazione $b^2 s^2 + a^2 \rho^2 = a^2 b^2$ è facile dedurre $b_1^2 s_1^2 + a_1^2 \rho_1^2 = a_1^2 b_1^2$, dove si è posto $a_1 = b$, $b_1 = b^2/a$. Siccome l'equazione della sviluppata si può ottenere da quella della curva primitiva moltiplicando s e ρ per $a:b$, si vede che *le epicicloidi e le ipocicloidi son curve simili alle loro sviluppate*. Se si considera la progressione geometrica, iniziata dai termini a e b , la n^{ima} sviluppata della linea cicloidale, definita dai parametri a e b , è definita dai termini n^{imo} ed $(n+1)^{\text{imo}}$ della progressione. Se questa converge, come accade (I, 8, c) per le sole epicicloidi, è applicabile l'osservazione fatta nel § 12, e si trova

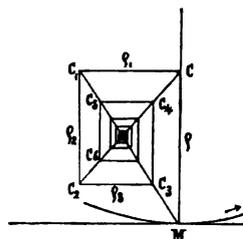
$$x = \frac{b^2 s}{a^2 - b^2} \quad , \quad y = \frac{a^2 \rho}{a^2 - b^2} .$$

Son queste appunto (cfr. § 7, h) le coordinate del centro della direttrice, nel quale tendono dunque a raccogliersi le successive sviluppate dell'epicloide.

g) Esistono curve per le quali ogni punto ed il corrispondente centro di curvatura della sviluppata stanno in linea retta con un punto fisso? Cerchiamo, più generalmente, l'involuppo di MC_1 . L'equazione di questa retta è $\rho x + \rho_1 y = 0$. Derivandola si ottiene $(\rho + \rho_2)y = \rho^2$. Dunque le coordinate del punto di contatto P di MC_1 col suo involuppo sono

$$x = -\frac{\rho\rho_1}{\rho + \rho_2}, \quad y = \frac{\rho^2}{\rho + \rho_2}, \quad (15)$$

ed applicando loro il procedimento accennato nel § 4 si perverrebbe in ogni caso all'equazione dell'involuppo. Se si vuole che P sia fisso, bisogna esprimere che le condizioni (2) sono soddisfatte dalle precedenti funzioni x ed y ; ma è preferibile continuare le derivazioni, riprendendo l'ultima equazione ottenuta, cioè $(\rho + \rho_2)y = \rho^2$. Si trova, tenendo presenti le espressioni delle coordinate, $\rho\rho_2 = \rho_1\rho_2$, e si vede così che C_2 appartiene ad MC_1 . Intanto è facile convincersi che il punto P appartiene a CC_2 , vale a dire che la curva (C) ha la stessa proprietà della (M), e però C_4 appartiene a CC_2 ; ecc. Le curve che noi andiamo cercando sono dunque tali che i loro successivi centri di curvatura, in un punto qualunque M, sono collocati su due rette, che ruotano intorno al punto fisso P quando M percorre la curva (M). Quali sono queste curve? Scritta l'equazione $\rho\rho_2 = \rho_1\rho_2$ sotto la forma $\rho:\rho_1 = \rho_2:\rho_2$ se ne deduce subito, ricordando la relazione (13) ed integrando, $\rho_2 = k\rho$; poi, integrando ancora, $\rho_1 = ks$, e finalmente $\rho^2 - ks^2 = \text{costante}$. Dunque le curve cercate son quelle del tipo cicloidale o pseudocicloidale, e le spirali logaritmiche. Inoltre, portando nelle (15) i valori $\rho_1 = ks, \rho_2 = k\rho$, si ottiene



$$x = -\frac{ks}{1+k}, \quad y = \frac{\rho}{1+k},$$

e si riconosce così (cfr. § 7, h) che il punto fisso P è il centro della direttrice. Alle stesse curve si perverrebbe anche ponendo soltanto la condizione che C_1 e C_2 siano in linea retta con M.

h) Per trovare la sviluppante del circolo di raggio a basta porre $\rho_1 = a$ nella seconda formola (12). Si ottiene $\rho d\rho = a ds$, poi $\rho^2 = 2as$, e così è giustificato il nome dato in principio (I, 8, a) alla curva rappresentata da questa equazione. Ora, se si vuole una sviluppante della sviluppante, bisogna sostituire le espressioni (12) di s_1 e ρ_1 in $\rho_1^2 = 2as_1$, e si trova, integrando, che ρ^2 è proporzionale ad s^2 . Si è in tal modo condotti ad assumere l'equazione d'una $(n-1)^{\text{ma}}$ sviluppante di circolo sotto la forma $\rho^n = k_n s^{n-1}$. Intanto, mercè le (12), si trova che l'equazione intrinseca della sviluppata di questa curva è $\rho^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} k_n s^{n-2}$, e d'altra parte bisogna che sia $\rho^{n-1} = k_{n-1} s^{n-2}$. Il paragone fra le due equazioni permette di calcolare k_n (ricordando che $k_1 = a$), e si trova così che

$$\rho^n = \frac{n!}{n^n} a s^{n-1}$$

è l'equazione d'una $(n-1)^{\text{ma}}$ sviluppante del circolo di raggio a . Le successive

sviluppati tendono sempre più a prender forma di spirale logaritmica, giacchè, crescendo n indefinitamente, l'equazione intrinseca tende a diventare $\rho = es$.

e) Tutte le curve $\rho = ks^n$ hanno le sviluppate della medesima specie. Si sa (I, 11, e) che queste curve appartengono a quattro tipi differenti, secondo che n cade in uno dei quattro intervalli determinati dagli estremi $-\infty, 0, 1, 2, \infty$. Ricordiamo che fra le curve del primo tipo sta la clotoide, e fra quelle del secondo la sviluppante di circolo. Le curve del quarto tipo sono caratterizzate dalla presenza di assintoti a distanza finita, mentre quelle del terzo si estendono all'infinito come la curva $a\rho = s^2$, che ammette una nota (I, 11, a) sviluppante. Applicando le (12) all'equazione $\rho = ks^n$ si ottiene un'equazione analoga, in cui l'esponente n è diventato $n_v = 2 - \frac{1}{n}$. Ne segue che le curve del primo tipo hanno le loro sviluppate del quarto, e ciò si spiega osservando che dai punti di maggior contatto con la tangente nascono gli assintoti. Le curve del secondo tipo hanno le sviluppate dello stesso tipo o del primo; quelle degli altri hanno le sviluppate del terzo. È quest'ultimo tipo che tende sempre a comparire quando si prendono le successive sviluppate, fatta eccezione delle sviluppanti di circolo. Infatti l'esponente n per la v^{ma} sviluppata ha il valore

$$n_v = \frac{(v+1)n - v}{vn - (v-1)},$$

e si vede facilmente che per $v \geq 2$, e per n negativo o maggiore di 1, si ha $1 < n_v < 2$. Soltanto le curve del secondo tipo hanno sviluppate di tutti i tipi, giacchè la v^{ma} sviluppata è del terzo, del quarto, del primo o del secondo tipo, rispettivamente, secondo che n appartiene ad uno degli intervalli determinati dagli estremi $0, \frac{v-2}{v-1}, \frac{v-1}{v}, \frac{v}{v+1}, 1$, esclusi gli estremi stessi, i quali corrispondono al circolo ed alle sue sviluppanti, ed alla spirale logaritmica; ma, siccome i numeri intermedi tendono all'unità quando v cresce indefinitamente, è manifesto che il terzo tipo finisce per prevalere in ogni caso. Del resto si può arrivare a questa conclusione osservando che, quando n è compreso fra 0 ed 1, basta prendere $(v-1)(1-n) > 1$ perchè n_v cada fra 1 e 2. Siccome poi in tutti i casi $\lim n_v = 1$, è chiara la tendenza di tutte le sviluppate a prender forma di spirale logaritmica.

III. CURVE PIANE NOTEVOLI

1. **Coniche.** Si chiama *conica* ogni curva rappresentata, nell'ordinario sistema cartesiano di assi immobili, da un'equazione del secondo grado fra le coordinate x ed y dei suoi punti. Quando la conica è riferita alla tangente ed alla normale in un punto qualunque M, manca nell'equazione il termine indipendente; poi, dovendo essere (I, 1, 4), per x tendente a zero,

$$\lim \frac{y}{x} = 0 \quad , \quad \lim \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\rho} \quad ,$$

si vede che l'equazione dev'esser priva anche del termine in x , dimodochè si potrà darle la forma

$$y = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy) , \quad (1)$$

rappresentando per ora con α la curvatura, in M . Si osservi che, per l'arbitraria scelta dell'origine M , accadrà in generale che, se x cresce indefinitamente, anche y sarà infinitamente grande del medesimo ordine, e però il primo membro di (1) diventerà trascurabile rispetto al secondo, che si può sempre scomporre in fattori lineari:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy = (\lambda x + \mu y)(\lambda' x + \mu' y) .$$

Dunque all'infinito la curva tende a comportarsi come una coppia di rette

$$\lambda x + \mu y = q \quad , \quad \lambda' x + \mu' y = q' \quad , \quad (2)$$

immaginarie conjugate quando il discriminante $\Delta = \alpha\beta - \gamma^2$ è positivo, reali e distinte quando $\Delta < 0$. Nel primo caso la conica si chiama *ellisse*, nel secondo *iperbole*. Fra le ellissi e le iperboli sta la *parabola*, caratterizzata da $\Delta = 0$. Si chiama poi *iperbole equilatera* la conica che all'infinito si comporta come una coppia di rette ortogonali. Essa è caratterizzata dalla condizione di ortogonalità delle (2), cioè $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$, che si riduce ad $\alpha + \beta = 0$.

2. Assintoti. Immaginiamo che nei primi membri delle (2) si pongano per x ed y le coordinate dei punti della curva. Così l'eguaglianza fra i primi ed i secondi membri verrà distrutta, ma tenderà ad essere ristabilita, quando il punto (x, y) si allontana indefinitamente sulla curva, se per q e q' si mettono i limiti dei primi membri. Siccome poi le differenze fra i primi ed i secondi membri rispettivi rappresentano, a prescindere da fattori finiti, le distanze di (x, y) alle due rette, queste sono (II, 2) assintoti della curva. Intanto, se si pone in evidenza il fattore x in $\lambda x + \mu y$ e $\lambda' x + \mu' y$, si riconosce subito che, se queste quantità tendono a limiti finiti, quando x cresce indefinitamente, il rapporto $y:x$ tende a $-\lambda:\mu$ per la prima quantità, a $-\lambda':\mu'$ per la seconda. Per conseguenza, tenendo presenti le relazioni

$$\lambda\lambda' = \alpha \quad , \quad \mu\mu' = \beta \quad , \quad \lambda\mu' + \mu\lambda' = 2\gamma \quad , \quad \lambda\mu' - \mu\lambda' = 2i\sqrt{\Delta} \quad ,$$

si trova

$$q = \lim(\lambda x + \mu y) = \lim \frac{2y}{\lambda' x + \mu' y} = \frac{2\lambda}{\lambda\mu' - \mu\lambda'} = -\frac{i\lambda}{\sqrt{\Delta}} \quad ,$$

$$q' = \lim(\lambda' x + \mu' y) = \lim \frac{2y}{\lambda x + \mu y} = \frac{2\lambda'}{\mu\lambda' - \lambda\mu'} = \frac{i\lambda'}{\sqrt{\Delta}} \quad .$$

Per la *parabola* ($\Delta = 0$) questi valori diventano infiniti, ed inoltre $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy$ è il quadrato di $\lambda x + \mu y$ o di $\lambda' x + \mu' y$, cioè, col tendere di Δ a zero, le (2) tendono a rappresentare una coppia di rette coincidenti, respinte all'infinito.

3. Centro e diametri. Risolvendo le (2) si trova che gli *assintoti*, reali o immaginari, si tagliano sempre nel punto reale

$$x = -\frac{\gamma}{\Delta}, \quad y = \frac{\alpha}{\Delta}. \quad (3)$$

È utile osservare che queste coordinate soddisfano alle equazioni

$$ax + \gamma y = 0, \quad \gamma x + \beta y = 1, \quad (4)$$

che si possono dunque sostituire alle (2) in quanto debbono servire alla ricerca del punto stesso. Ora, scritta la (1) sotto la forma

$$2y = (ax + \gamma y)x + (\gamma x + \beta y)y,$$

le (4) mostrano che il secondo membro diventa y , e però l'equazione non è soddisfatta dai valori (3), ma basta *raddoppiare* questi valori perchè l'equazione sia verificata. Dunque il punto O , definito dalle coordinate (3), è un *centro* della curva, vale a dire che divide per metà tutte le corde che vi passano. Inoltre, fissato y ad arbitrio, l'equazione (1) fornisce per x due valori, la cui media aritmetica è $-\gamma y : \alpha$. Dunque il punto medio di qualunque corda parallela alla tangente in M è tale che si ha $ax + \gamma y = 0$, soddisfa cioè alla prima delle (4), che rappresenta la retta OM . Dunque, se si chiama *diametro* il luogo dei punti medii d'un sistema di corde parallele, si vede che *i diametri d'una conica son le rette uscenti dal centro*.

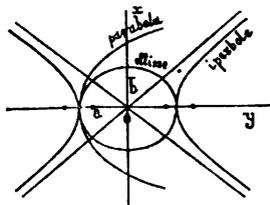
4. Vertici ed assi. Si chiamano *assi* i diametri normali alla conica, e *vertici* i loro punti d'incidenza. Affinchè M sia un vertice occorre, per le (3), che γ sia nullo, ed allora il segmento OM ha la lunghezza $a = \alpha : \Delta = 1 : \beta$. Intanto, se si trasporta per un momento l'origine in O , l'equazione della conica diventa

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy = \frac{\alpha}{\Delta}, \quad (5)$$

e si riduce, quando M è un vertice, e ponendo $b^2 = a^2 \alpha$, a

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2, \quad (6)$$

Questa permette di rendersi conto rapidamente della forma della curva nei vari casi, e di riconoscere così l'esistenza di due assi (bisettrici degli assintoti) e di quattro vertici, tutti reali nell'ellisse ($b^2 > 0$), due reali e due immaginari nell'iperbole ($b^2 < 0$). Designeremo costantemente con a la radice positiva di a^2 , e con b o con b_i la radice positiva di b^2 o di $-b^2$, e nel primo caso supporremo $a > b$, scambiando, se occorre, a con b . In entrambi i casi, fatte queste convenzioni, l'asse da cui la conica stacca il segmento $2a$, sempre reale, si distingue dall'altro col nome di *asse focale*. Ciò premesso, facciamo ruotare di θ e di θ' l'asse focale, ed



assumiamo le sue nuove posizioni come assi x ed y rispettivamente. L'equazione (6) si trasforma in

$$a^2(x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{sen} \theta')^2 + b^2(x \cos \theta + y \cos \theta')^2 = a^2 b^2,$$

e mancherà del termine xy se θ' si vincola a θ in modo che si riduca a zero $a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' + b^2 \cos \theta \cos \theta'$, se cioè si pone fra θ e θ' la relazione

$$\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta' = -\frac{b^2}{a^2}. \quad (7)$$

L'equazione torna dunque ad avere la forma (6), e siccome, per ogni valore attribuito ad una coordinata, l'altra prende valori uguali ed a segni opposti, si vede che i diametri d'una conica si possono associare per coppie in modo che in ogni coppia *ciascun diametro divide per metà le corde parallele all'altro*. Due siffatti diametri diconsi fra loro *conjugati*. Si noti che ciascun assintoto è conjugato a sè stesso, e che la sola coppia di diametri conjugati ortogonali è costituita dagli assi. In tutto ciò si esclude l'eguaglianza fra b ed a , che si verifica solo quando la conica si riduce ad un circolo. È poi utile osservare che *solo nel circolo e nell'iperbole equilatera ogni coppia ortogonale di diametri è conjugata ad un'altra coppia ortogonale*, giacchè per avere simultaneamente

$$\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \cot \theta \cot \theta' = -\frac{b^2}{a^2},$$

occorre che sia $a^4 = b^4$, cioè $a^2 = \pm b^2$, e presto si vedrà che, prendendo il segno inferiore, si definisce appunto l'iperbole equilatera.

5. Il calcolo dei semi-assi a e b si esegue facilmente osservando che, nel passare da (5) a (6), si è trasformata ortogonalmente una forma quadratica, definita dal primo dei discriminanti

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{b^2 \Delta} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{a^2 \Delta} \end{vmatrix},$$

in un'altra, definita dal secondo discriminante. Tale trasformazione lascia inalterati gli invarianti ortogonali, e però si ha

$$\alpha + \beta = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{\alpha}{\Delta}, \quad \alpha \beta - \gamma^2 = \frac{\alpha^2}{a^2 b^2 \Delta^2},$$

d'onde si trae

$$a^2 + b^2 = \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{\Delta^2}, \quad ab = \frac{\alpha}{\Delta^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

Queste formole mostrano che l'iperbole equilatera è caratterizzata dalla relazione $b = ia$, e che per la parabola sono infiniti a e b . Inoltre, se si tien conto della relazione

$$\frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{(\alpha + \beta)^{\frac{3}{2}}}, \quad (9)$$

ottenuta eliminando Δ fra le (8), si vede che, fissati α e β , se si fa tendere γ^2 ad $\alpha\beta$ crescendo, l'ellisse definita dai semi-assi a e b tende a convertirsi in una parabola, e ciò avviene in modo che, crescendo indefinitamente i semi-assi, il primo membro di (9) resta costantemente uguale ad una certa lunghezza p , che si chiama *parametro* della parabola. Ne segue che b non può essere infinitamente grande dell'ordine di a , altrimenti il primo membro di (9) crescerebbe all'infinito come a . Si deve dunque supporre b trascurabile rispetto ad a , ed allora la (9) diventa $\lim(b^2:a) = p$.

6. Equazione intrinseca. Rendiamo l'origine mobile lungo la curva, e deriviamo l'equazione (1) esprimendo che le condizioni d'immobilità sono soddisfatte da x ed y , ed osservando che α, β, γ sono funzioni di s . L'equazione che si ottiene

$$\left(\alpha - \frac{1}{\rho}\right)x + \gamma y = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{ds} - \frac{2\gamma}{\rho}\right)x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{2\gamma}{\rho}\right)y^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha - \beta}{\rho}\right)xy$$

deve (II, 5) coincidere con (1), e però $\alpha = \frac{1}{\rho}$; poi

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(\alpha + \frac{2}{\rho}\right)\gamma, \quad \frac{d\beta}{ds} = \left(\beta - \frac{2}{\rho}\right)\gamma, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \gamma^2 - \frac{\alpha - \beta}{\rho}. \quad (10)$$

La prima di queste formole dà subito

$$\gamma = \frac{\rho}{3} \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} = \frac{d}{ds} \log \rho^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\rho_1}{3\rho^2}.$$

Già la sostituzione dei valori di α e γ nella prima equazione (4) conduce alla costruzione, segnalata da Mac-Laurin, del centro di curvatura C_1 della sviluppata d'una conica. Infatti la detta equazione diventa $3\rho x = \rho_1 y$, e se ne deduce che, se il diametro OM incontra in Q la normale alla sviluppata, il segmento QC_1 è diviso dal centro di curvatura della conica nel rapporto di 1 a 3. Ritornando alla (10) osserviamo che si ha

$$\frac{d}{ds}(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)\gamma, \quad \frac{d\Delta}{ds} = 2\gamma\Delta,$$

cioè

$$\frac{d}{ds} \log(\alpha + \beta) = \frac{d}{ds} \log \rho^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{d}{ds} \log \Delta = \frac{d}{ds} \log \rho^{-\frac{2}{3}}.$$

Ne segue, indicando con A e B due costanti arbitrarie,

$$\alpha + \beta = A\rho^{-\frac{1}{3}}, \quad \Delta = B\rho^{-\frac{2}{3}}. \quad (11)$$

D'altra parte

$$\gamma^2 = -\alpha^2 + \alpha(\alpha + \beta) - \Delta = -\alpha^2 \left(1 - A\rho^{\frac{2}{3}} + B\rho^{\frac{4}{3}}\right),$$

ovvero

$$\frac{1}{9} \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = -1 + A\rho^{\frac{2}{3}} - B\rho^{\frac{4}{3}}. \quad (12)$$

Dunque l'equazione intrinseca delle coniche è

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{-1 + A\rho^{\frac{2}{3}} - B\rho^{\frac{4}{3}}}} .$$

7. Per determinare le costanti A e B in funzione dei semi-assi ricordiamo (§ 4) che, quando M è un vertice, la normale contiene il centro, e però, in virtù delle (3), si ha $\gamma=0$, ed il valore di a o di b è espresso da

$$\frac{\alpha}{\Delta} = \frac{\alpha}{B\rho^{-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{B\rho^{\frac{1}{3}}} .$$

Per conseguenza, se nell'equazione che si ottiene ponendo uguale a zero il secondo membro di (12) si fa $\rho^{\frac{2}{3}}=1:B^2x$, l'equazione così trasformata

$$1 - ABx + B^2x^2 = 0$$

ammette appunto le radici a^2 e b^2 , e però si ha

$$a^2 + b^2 = \frac{A}{B^2} , \quad a^2 b^2 = \frac{1}{B^2} ;$$

quindi

$$A = (a^2 + b^2)(ab)^{-\frac{4}{3}} , \quad B = (ab)^{-\frac{2}{3}} . \quad (13)$$

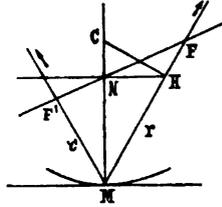
Si noti inoltre che sull'asse focale e sull'altro asse (ma non altrove) la curvatura ha i valori $B^3 a^3 = a : b^3$ e $B^3 b^3 = b : a^3$. Alle formole (13) si sarebbe potuto giungere assai più rapidamente per altra via, giacchè le (11) non differiscono dalle (8); ma il procedimento da noi tenuto per arrivare alle (11) ha il vantaggio di essere applicabile sempre, indipendentemente dalla conoscenza preliminare delle proprietà della curva. Ed ora, grazie alle (13), l'equazione intrinseca delle coniche diventa

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \left(\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)}} . \quad (14)$$

Quali sono le forme particolari di questa equazione per la parabola e per l'iperbole equilatera? Nel caso dell'iperbole equilatera si ha $b=ia$, e le (13) danno $A=0, B=-a^{-\frac{4}{3}}$. Invece per la parabola si ha $B=0$, ed il valore di A si ottiene ricordando che il primo membro di (9) rappresenta il parametro p , dimodochè $A=p^{-\frac{3}{2}}$. Dunque le equazioni intrinseche della parabola e dell'iperbole equilatera sono rispettivamente

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}} , \quad s = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}} . \quad (15)$$

8. **Fuochi e curvatura.** Cerchiamo per quali curve la somma delle distanze di ciascun punto a due punti fissi è costante. Se $F(r, \theta)$ ed $F'(r', \theta')$



sono i due punti, si deve avere $r + r' = 2a$, e derivando, col tener conto della prima condizione d'immobilità, se ne trae $\theta + \theta' = \pi$. Dunque la normale divide per metà l'angolo dei raggi vettori. Inoltre, dalle condizioni

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\text{sen}\theta}{r}, \quad \frac{d\theta'}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\text{sen}\theta'}{r'} \quad (16)$$

si deduce, sommando,

$$\frac{2}{\rho} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \text{sen}\theta \quad (17)$$

Se da quel punto N della normale, che sta su FF' , si conduce alla normale stessa la perpendicolare, questa determina sui raggi vettori segmenti MH ed MH' , la cui lunghezza z è data dalla formola

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$$

Ora dalla (17) si ha $z = \rho \text{sen}\theta$, e però si costruisce il centro di curvatura elevando ancora per H la perpendicolare al raggio vettore, fino all'incontro C con la normale. Intanto la (17) si riduce alla forma $rr' = a\rho \text{sen}\theta$, e dà luogo, così, ad una interessante osservazione. Il raggio di curvatura della pedale di (M) rispetto ad F è (II, 7, l)

$$\rho' = \frac{r^2}{2r - \rho \text{sen}\theta} = \frac{ar}{2a - r'} = a$$

Dunque la pedale di (M) rispetto ad F (o ad F') è una circonferenza di raggio a . In altri termini la curva (M) si può sempre considerare come l'involuppo delle perpendicolari elevate alle rette d'un fascio nei loro punti d'incontro con una circonferenza. Tornando alle (16) osserviamo che se ne può anche dedurre, sottraendo,

$$2\frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \text{sen}\theta = \frac{r' - r}{a\rho},$$

e poichè $r + r' = 2a$ si ha pure

$$r = a\left(1 - \rho\frac{d\theta}{ds}\right), \quad r' = a\left(1 + \rho\frac{d\theta}{ds}\right),$$

d'onde, moltiplicando ed integrando,

$$\frac{\rho}{a} \text{sen}\theta = 1 - \rho^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2, \quad s = \int \frac{\rho d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\rho}{a} \text{sen}\theta}} \quad (18)$$

D'altra parte, se si rappresenta con $2c$ la distanza FF' ,

$$4c^2 = r^2 + r'^2 + 2rr' \cos 2\theta = (r + r')^2 - 4rr' \text{sen}^2\theta = 4(a^2 - a\rho \text{sen}^2\theta),$$

e per conseguenza $a \rho \operatorname{sen}^3 \theta$ conserva costantemente il valore $a^3 - c^3 = b^3$:

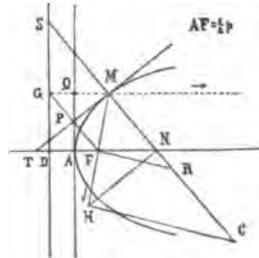
$$\rho = \frac{b^3}{a \operatorname{sen}^3 \theta} . \quad (19)$$

Ora, se in (18) si sostituisce θ in funzione di ρ , si ricade sull'equazione (14), nell'ipotesi $b^3 > 0$. Dunque le proprietà fin qui ottenute appartengono alle *ellissi*. Per giungere alle *iperboli* basta immaginare che si ripeta il calcolo precedente partendo dalla relazione $r - r' = 2a$, cioè supponendo che *la differenza delle distanze a due punti fissi resta costante*. Si otterrà subito $\theta + \theta' = 2\pi$, vale a dire che per le iperboli è *la tangente che divide per metà l'angolo dei raggi vettori*. Le altre proprietà rimangono inalterate. I punti F ed F' chiamansi *fuochi* della conica, $2c$ è la *distanza focale*, ed il rapporto k di c ad a si chiama *eccentricità* della conica. Evidentemente $k < 1$ per le ellissi, $k > 1$ per le iperboli, ed in particolare $k = 0, 1, \sqrt{2}$ per la circonferenza di circolo, per la parabola e per l'iperbole equilatera. Come sono situati i fuochi rispetto agli assi? La normale contiene i fuochi quando $\theta = \frac{1}{2}\pi$, ed allora la (19) mostra che si ha $\rho = b^3 : a$, e si è visto (§ 7) che ciò avviene solo sull'asse focale. Inoltre allora il punto di mezzo di FF' si trova alla distanza $\frac{1}{2}(r + r') = a$ da M, e però coincide col centro della curva. Dunque i *fuochi sono situati sull'asse focale, e distano egualmente dal centro*.

9. Applicazione alla parabola: a) Le considerazioni del paragrafo precedente non sono applicabili alla parabola, ma le conclusioni ottenute valgono per una conica definita da semi-assi arbitrariamente grandi, e tendono per conseguenza ad esser valide sotto una forma speciale anche per la parabola. Fissato l'asse focale d'una ellisse, e sull'asse un vertice, si facciano aumentare indefinitamente a e b in modo che il rapporto $b^3 : a$ tenda a p . Gli altri vertici, il centro ed un fuoco F' si allontaneranno all'infinito, ma il fuoco F tenderà ad una posizione limite, in cui la sua distanza dal vertice sarà

$$\lim(a - c) = \lim \frac{b^3}{a + c} = \lim \frac{b^3}{2a} = \frac{1}{2} p .$$

La pedale trovata per l'ellisse ha il raggio a , e però tende, per a infinito, a convertirsi in una retta, che per ragione di simmetria dev'essere perpendicolare all'asse; e siccome il piede della perpendicolare abbassata da F sulla tangente nel vertice è il vertice stesso, così possiamo affermare che *la pedale d'una parabola rispetto al fuoco è la tangente nel vertice*. La perpendicolare abbassata da F sulla tangente in M incontra in P la tangente ed in G la parallela condotta per M all'asse. Se si osserva che questa parallela è il limite del raggio vettore MF', si vede subito che *la tangente in M è bisettrice dell'angolo FMG*. Dunque il triangolo FMG, che ha la bisettrice in M perpendicolare alla base, è isoscele. Ne segue, innanzi tutto, che P divide la base FG per metà, e però, se Q è il piede della perpendicolare abbassata da M sulla tangente nel vertice A, i triangoli PQG e PAF sono



uguali. Dunque $AP = PQ$, cioè per costruire la tangente in M basta congiungere M al punto medio di AQ . Inoltre $QG = AF = \frac{1}{2}p$, e però il punto G sta sulla perpendicolare all'asse, elevata nel simmetrico di F rispetto ad A . La retta così costruita si chiama *direttrice* della parabola. Ad una più semplice costruzione della tangente (o della normale) si perviene osservando che il segmento di normale MN è uguale e parallelo a GF , e che però la sua proiezione sull'asse è uguale a quella di GF , cioè a p . Basterà dunque portare sull'asse, a partire dalla proiezione di M , nel senso in cui si va dal vertice al fuoco, un segmento di lunghezza p . L'estremo di tale segmento darà, congiunto ad M , la normale in M . Finalmente, sempre perchè FMG è isoscele, $MF = MG$. Dunque *ciascun punto della parabola dista egualmente dalla direttrice e dal fuoco.*

b) Ed ora passiamo a costruire il centro di curvatura. Per le cose dette nel § 8 bisogna, dal piede N della normale sull'asse, elevare la perpendicolare alla normale stessa fino all'incontro H col raggio vettore MF ; poi elevare per H la perpendicolare al raggio vettore fino all'incontro C con la normale. Ora, se si osserva che i triangoli MFN , MFH sono isosceli, si vede subito che F divide MH per metà. È dunque inutile costruire H , giacchè basterà elevare per F la perpendicolare al raggio vettore fino all'incontro R con la normale, ed il centro cercato sarà il simmetrico di M rispetto ad R . In altri termini: *la proiezione del raggio di curvatura sul raggio vettore è doppia del raggio stesso.* Se S è il punto d'incontro della normale con la direttrice, i triangoli rettangoli MFR , MGS sono uguali perchè hanno uguali gli angoli in M , e d'altra parte si è visto che $MF = MG$. Ne segue $MR = MS$, e si ottiene così una seconda costruzione del centro di curvatura, per la quale si può dire che la parabola è analoga alla cicloide ed alla catenaria (II, 7, d, e): *il raggio di curvatura è doppio del segmento di normale, staccato dalla direttrice a partire dal punto d'incidenza.*

10. Ovali di Cassini. Si chiamano ovali di Cassini o *cassinoidi* i luoghi dei punti che hanno costante il prodotto delle distanze a due punti fissi. Siano F ed F' i due punti fissi, che per brevità chiameremo *fuochi*; sia $2b$ la loro distanza, O il punto medio di FF' , e ψ l'inclinazione di OM su FF' . È chiaro che O è *centro* della curva, perchè se un punto soddisfa alla definizione, altrettanto fa il suo simmetrico rispetto ad O ; e per un'analoga ragione possiamo aggiungere che la curva è simmetrica rispetto all'asse focale ed alla perpendicolare elevata per O a tale asse. Ora, se r e θ sono le coordinate polari del centro, le distanze dell'origine M ai fuochi sono date da $\sqrt{r^2 \pm 2br \cos \psi + b^2}$, e la definizione della curva si traduce nell'eguaglianza

$$r^4 - 2b^2 r^2 \cos 2\psi + b^4 = a^4 . \quad (20)$$

Da questa, derivando, si ottiene

$$r^3 \cos \theta = b^2 \cos(2\psi - \theta) , \quad (21)$$

purchè si osservi che

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds}(\varphi + \theta) = \frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin \theta}{r} .$$

Ora l'eliminazione di r fra (20) e (21) dà

$$a^2 \cos \theta = b^2 \sin 2\psi ; \quad (22)$$

poi la (21) si trasforma in

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen} \theta + b^2 \cos 2\psi,$$

e da questa e dalla (20) si ricavano le formole

$$\cos 2\psi = \frac{r^4 - a^4 + b^4}{2b^2 r^2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{r^4 + a^4 - b^4}{2a^2 r^2}. \quad (23)$$

Dunque, a prescindere dal segno,

$$s = \int \frac{dr}{\cos \theta} = \int \frac{2a^2 r^2 dr}{\sqrt{[(a^2 + b^2)^2 - r^4][r^4 - (a^2 - b^2)^2]}}. \quad (24)$$

Invece derivando la (22) ed esprimendo tutto in funzione di r si ottiene

$$\rho = \frac{2a^2 r^3}{3r^4 - a^4 + b^4}. \quad (25)$$

L'eliminazione di r fra (24) e (25) farà poi conoscere l'equazione intrinseca delle cassinoidi.

11. L'eliminazione è facile quando $a = b$. Allora la cassinoide prende il nome di *lemniscata*. Le formole (24) e (25) diventano

$$s = \int \frac{2a^2 dr}{\sqrt{4a^4 - r^4}}, \quad \rho = \frac{2a^2}{3r}, \quad (26)$$

e l'eliminazione di r dà

$$s = 3 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^4 - 1}},$$

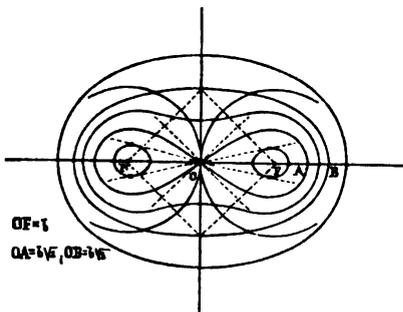
dopo aver posto $c = \frac{1}{3} a \sqrt{2}$. Questa è l'equazione intrinseca della *lemniscata*. Essa mostra che ρ cresce costantemente ed indefinitamente a partire da c , suo minimo valore, mentre, in virtù di (26), r decresce dal massimo $a\sqrt{2}$ fino a zero. D'altra parte le formole (23) diventano

$$\cos 2\psi = \operatorname{sen} \theta = \frac{r^2}{2a^2}, \quad (27)$$

e però $\psi = \pm \frac{1}{4} \pi$ per $r = 0$, e $\theta = \frac{1}{2} \pi$ per $r = a\sqrt{2}$. Dunque, se si tien conto della simmetria della curva rispetto all'asse focale, si riconosce che la lemniscata passa nel centro con due rami, che vi s'infiltono tagliandosi ad angolo retto, e va poi ad incontrare ortogonalmente l'asse focale in altri due punti, situati alla distanza $a\sqrt{2}$ dal centro. Inoltre le (27) mostrano che si ha sempre $2\psi = \frac{1}{2} \pi - \theta$, d'onde segue che l'*inclinazione della normale sull'asse focale è tripla di quella del raggio vettore*. Questa proprietà permette di costruire la normale in un punto quando son dati i fuochi. Se poi si vuole il centro di curvatura basta osservare che, in virtù di (27), la seconda formola (26) dà $r = 3\rho \operatorname{sen} \theta$, cioè: *la proiezione del raggio di curvatura sul raggio vettore MO è la terza parte di MO*. Per questa proprietà

si può dire che la lemniscata è analoga alla parabola (cfr. § 9, b) ed alla spirale logaritmica (I, 11, c).

12. Ogni cassinoide ha tutti i punti a distanza finita. Infatti, affinché sia reale l'espressione (24), occorre che r^2 non superi $a^2 + b^2$, e non sia mai inferiore al valore assoluto di $a^2 - b^2$. Si vede intanto dalla prima formola



(23) che $\sin\psi$ è nullo per $r^2 = a^2 + b^2$ come per $r^2 = b^2 - a^2$, e però la curva incontra l'asse in quattro punti quando $a < b$, in due soltanto quando $a > b$. Lo stesso modo di variare di r mostra poi che la curva consta di due ovali eguali nel primo caso, e d' un sol ramo chiuso nel secondo. Essa incontra sempre ad angolo retto l'asse focale perchè $\cos\theta$ si annulla, in virtù di (22), insieme a $\sin\psi$.

Inoltre dalla (21) si ha $r = \pm b$ per $\theta = \psi \geq \frac{1}{2}\pi$, e però i punti più lontani dall'asse appartengono alla circonferenza descritta sul segmento focale come diametro; ma bisogna osservare che questa circonferenza non incontra la curva se il valore di r non è compreso fra i limiti trovati precedentemente: ciò accade per $a > b\sqrt{2}$. Se poi si fa $r^2 = a^2 - b^2$, ψ diventa, in virtù di (23), uguale ad $\frac{1}{2}\pi$, e si ottengono così i punti d'incontro con la perpendicolare elevata dal centro all'asse focale. Le circonferenze di raggio a , descritte da tali punti come centri, si tagliano nei fuochi: ciò permette di costruire i fuochi in modo analogo a quello che si usa per le coniche. Ancora per la seconda formola (23) si vede che la tangente contiene il centro se $r^4 = b^4 - a^4$, e ciò può accadere solo nelle cassinoidi a due ovali ($a < b$). La discussione della (25) mostra poi che la curvatura raggiunge allora il suo minimo valore. Finalmente sulle cassinoidi ad un sol ramo ($a > b$) si hanno quattro flessi per $r^4 = \frac{1}{2}(a^4 - b^4)$, purchè questo valore di r cada fra i limiti trovati, per la qual cosa occorre che sia $a < b\sqrt{2}$. Quando $a > b\sqrt{2}$ la cassinoide è tutta convessa, come un'ellisse, e la sua curvatura varia fra i limiti

$$\frac{a^2 - 2b^2}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}} \quad , \quad \frac{a^2 + 2b^2}{a^2\sqrt{a^2 + b^2}} \quad .$$

Tutte queste curve son facili a dedurre, mediante una trasformazione (II, 7, k) d'indice $\frac{1}{2}$, da una coppia di circoli, descritti dai fuochi come centri, col raggio $a^2 \cdot b$. I due circoli possono non incontrarsi, ovvero incontrarsi lasciando fuori i centri, o finalmente incontrarsi in modo che in ciascuno cada il centro dell'altro. Secondo i varii casi si ottengono tutte le forme di cassinoidi, corrispondenti alle ipotesi

$$a < b \quad , \quad b < a < b\sqrt{2} \quad , \quad b\sqrt{2} < a \quad ,$$

rispettivamente. In particolare la lemniscata nasce da una coppia di circoli tangenti uguali, e l'altra cassinoide speciale ($a=b\sqrt{2}$) da una coppia di circoli tali, che la circonferenza di ciascun circolo passa nel centro dell'altra.

13. Curve di Ribaucour e spirali sinusoidi. Ci proponiamo di studiare le curve che hanno il raggio di curvatura proporzionale al segmento staccato sulla normale, a partire dal punto d'incidenza, dalla polare di questo punto rispetto ad un circolo fisso. Chiameremo direttrice la circonferenza del circolo, e polo il suo centro. Due casi particolari ci si presentano immediatamente. La direttrice può ridursi al polo, ed allora si hanno le curve caratterizzate dalla seguente proprietà: *la proiezione del centro di curvatura sul raggio vettore divide questo raggio in un rapporto costante.* Queste curve si chiamano *spirali sinusoidi*: tali sono, per esempio, le tre curve citate in fine del § 11. Può invece accadere che la direttrice sia rettilinea, ed allora si hanno le *curve di Ribaucour*, delle quali abbiamo esempi nelle tre curve menzionate in fondo al § 9. Esse hanno il raggio di curvatura proporzionale al segmento di normale compreso fra il punto d'incidenza ed una retta fissa. Particolarmente notevole è la parabola, che in virtù delle due costruzioni trovate nel § 9 appartiene all'una ed all'altra famiglia. Ciò premesso, siano R il raggio ed O il centro della direttrice, x ed y le coordinate cartesiane di O, r e θ le coordinate polari, e si rappresenti con $(n+1)\rho$ il segmento di normale compreso fra il punto d'incidenza M e la polare di M rispetto alla direttrice. Conduciamo per M una tangente alla direttrice. Il segmento compreso fra M ed il punto di contatto, cateto d'un triangolo rettangolo, che ha l'ipotenusa r e l'altro cateto uguale ad R, ha sull'ipotenusa la proiezione $(n+1)\rho \sin \theta$, e però

$$r^2 - R^2 = (n+1)\rho y . \quad (28)$$

Derivando, e tenendo presenti le condizioni d'immobilità, si ottiene

$$(n-1)\rho x - (n+1)\rho_y = 0 . \quad (29)$$

Dunque il raggio vettore divide nel rapporto costante $-(n+1):2n$ il raggio di curvatura della sviluppatà. Questa è una proprietà caratteristica delle curve che stiamo studiando, giacchè l'integrazione di (29) riconduce necessariamente alla (28) con R costante arbitraria. Un'altra proprietà si scopre considerando la circonferenza descritta sul segmento di normale, compreso fra M e la polare di M rispetto alla direttrice. Già sappiamo dagli elementi della Geometria che questa circonferenza è ortogonale alla direttrice. Ora, per cercarne l'involuppo, bisogna derivare l'equazione $x^2 + y^2 = (n+1)\rho y$, e si ricade così sulla (29). La retta rappresentata da questa equazione incontra la circonferenza in M ed in un altro punto M', diguisachè l'involuppo consta di (M) e di un'altra curva (M'). Intanto l'equazione (29) è soddisfatta dalle coordinate del polo. Dunque, quando M percorre la curva, la

retta MM' gira intorno al polo. Inoltre le tangenti all'inviluppo, in M ed in M' , dovendo (II, 6) in questi punti toccare anche la circonferenza involupata, sono antiparallele rispetto ad MM' . Dunque (II, 7, j) la curva (M') è inversa di (M).

14. **Equazione intrinseca.** Per le condizioni d'immobilità si ha

$$rdr = -xds = \rho dy ; \quad (30)$$

poi, dividendo per (28),

$$\frac{rdr}{r^2 - R^2} = \frac{dy}{(n+1)y} ;$$

quindi

$$r^2 - R^2 = (n+1)c^2 \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \quad (31)$$

purchè n , finito, differisca da 0 e da -1 . Sostituendo in (28) l'ultimo risultato si ottiene

$$\rho = c \left(\frac{y}{c}\right)^{-\frac{n-1}{n+1}}. \quad (32)$$

Ora, ricavato da questa formola il valore di y , basterà sostituirlo in (31) per ottenere anche x :

$$x = c \left(\frac{\rho}{c}\right)^{-\frac{n+1}{n-1}} \sqrt{(n+1) \left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \frac{R^2}{c^2} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2n+1}{n-1}} - 1}, \quad y = c \left(\frac{\rho}{c}\right)^{-\frac{n+1}{n-1}}. \quad (33)$$

Finalmente dalle (30) si ha $s = -\int \frac{\rho}{x} dy$, cioè

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{(n+1) \left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \frac{R^2}{c^2} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2n+1}{n-1}} - 1}}. \quad (34)$$

È questa l'equazione intrinseca generale delle nostre linee. Vi si arriva più facilmente utilizzando la (29), che dà subito $s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{y}{x} d\rho$; ecc.

15. Prima di andare oltre notiamo alcune conseguenze delle formole (31) e (32). Lasciando per ora da parte il caso d'un polo all'infinito, si vede facilmente che, se $n^2 \geq 1$, la curva non può incontrare obliquamente la direttrice, nè inflettersi o regredire fuori di essa, perchè nei punti d'incontro della curva con la direttrice ($r=R$), e solo in tali punti, la curvatura diventa nulla o infinita. Inoltre le curve che hanno l'indice inferiore a -1 non incontrano la direttrice, e però son prive di flessi e di cuspidi; per quelle che hanno l'indice superiore a -1 , ma inferiore ad 1, la curvatura non è mai nulla a distanza finita; e la curvatura di quelle, che hanno l'indice maggiore di 1, è sempre finita. In particolare: la curvatura d'una spirale sinusoide non può, a distanza finita dal polo, e fuori di questo punto, esser nulla

o infinita. Ne segue, per esempio, che una spirale sinusoidale non può avere che una sola cuspidale, o un sol punto assintotico, o un solo flesso, ed in questo cade necessariamente il polo; e le spirali con indice inferiore a -1 son prive di siffatti punti perchè non contengono il polo. Escluse le spirali sinusoidi ($R=0$), il modo di comportarsi delle nostre curve in vicinanza della direttrice si deduce agevolmente dalla loro equazione intrinseca. Infatti, quando ρ diventa nullo o infinito, è sempre il termine di mezzo, sotto il radicale, che finisce per prevalere nell'equazione (34). Ne segue che nel dominio di qualunque suo punto reale d'incontro con la direttrice la curva si comporta come se la sua equazione avesse la forma $\rho^3 s^{n-1} = \text{costante}$, e si può, secondo che n è superiore o, in valore assoluto, inferiore all'unità, ascriverla ad uno di quei tipi (II, 13, *i*) di linee, che hanno la curvatura proporzionale all'arco, e sono rispettivamente rappresentati dalla clotoide e dalla sviluppante di circolo. Si può anche aggiungere (I, 11, *e*) che, se n è razionale, ma non uguale al quoziente di due numeri dispari, la curva subisce un regresso ogni volta che incontra la direttrice, e però essa è *tutta interna o tutta esterna alla direttrice stessa*. Quest'ultima asserzione sussiste poi, evidentemente, per tutte le curve con indice $n < -1$, appunto perchè tali curve non incontrano la direttrice.

16. **Esempi:** *a*) Ciascun valore dell'indice n definisce una famiglia di linee, che include sempre una curva di Ribaucour ed una spirale sinusoidale. Semplicissima fra tutte è quella definita dall'indice 1: l'equazione (32) ci dice subito che si tratta di una famiglia di *circoli*. Se a è la distanza del polo dal centro d'un circolo di raggio b , sulla circonferenza di questo circolo si può sempre scegliere un punto tale che le coordinate del polo siano $x=a, y=b$, ed allora la (28) dà $R^2 = a^2 - b^2$. Dunque la direttrice è ortogonale alla circonferenza data, ed è questo il solo caso d'incontro che avviene, senza che la curvatura diventi nulla o infinita, fra una curva e la sua direttrice. In particolare si può considerare una circonferenza qualunque come spirale sinusoidale o come curva di Ribaucour secondo che il polo si colloca sulla circonferenza stessa o si allontana all'infinito.

b) Interessante è la famiglia definita dall'indice -2 . Essa consta di tutte le *coniche*. Basta osservare, per convincersene, che per $n = -2$ la prima proprietà dimostrata nel § 13 conduce alla costruzione (§ 6) di Mac-Laurin, ed in questo modo si vede inoltre che, per le coniche, il polo sta nel centro. Del resto l'equazione (34) si riduce appunto alla forma (14) quando vi si pone $n = -2, c^2 = ab, R^2 = a^2 + b^2$; e le (33) diventano

$$x = \left(\frac{a^2 b^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \left(\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)}, \quad y = \left(\frac{a^2 b^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Queste sono le coordinate del centro, perchè nei vertici, cioè per $\rho = a^2 b$ o $\rho = b^2 a$, si annulla x , mentre y diventa uguale a b o ad a . Se poi si osserva il valore trovato per R si vede che *la direttrice d'una conica è la circonferenza circoscritta al rettangolo costruito sugli assi*. Siccome R si annulla per l'iperbole

equilatera e diventa infinito per la parabola, si può aggiungere che *la spirale sinusoidale e la curva di Ribaucour d'indice -2 sono l'iperbole equilatera e la parabola*, rispettivamente. Qualunque sia la conica, la definizione stessa delle nostre curve fornisce un'altra costruzione del centro di curvatura, perchè ci dice che questo centro è *simmetrico del punto d'incontro della normale con la polare del punto d'incidenza rispetto alla circonferenza direttrice*. Finalmente la proprietà dimostrata in fine del § 13 permette di asserire che *le circonferenze simmetriche, rispetto alle tangenti, di quelle che son descritte sui raggi di curvatura d'una conica, incontrano ortogonalmente la circonferenza direttrice ed involuppano un'altra curva, inversa, rispetto al centro, della conica considerata*.

c) Più interessante ancora è la famiglia che risponde al valore 0 dell'indice. La formola (31) non conviene a *tutte* le curve della famiglia, perchè la scelta della costante è stata fatta in modo che questa cessa di essere *arbitraria* per $n=0$; ma basterà moltiplicare il secondo membro di (31) per un fattore costante k , ed allora dalle formole (31) e (28) si avrà $r^2 - R^2 = ky^2 = \rho y$; poi

$$x = -\frac{1}{k} \sqrt{(k-1)\rho^2 + k^2 R^2}, \quad y = \frac{\rho}{k}.$$

Del resto, per trovare tutte le curve d'indice 0 non occorrono nuovi calcoli, perchè la (29) diventa $\rho x + \rho_1 y = 0$ e ci dice che *il centro di curvatura della sviluppata appartiene al raggio vettore*. Ora si sa (II, 13, g) che questa proprietà caratterizza le *linee cicloidali*, se così vogliono chiamare tutte le linee rappresentate dall'equazione intrinseca generale

$$\rho^2 = \alpha s^2 + 2\beta s + \gamma.$$

Si è visto che questa rappresenta per $\alpha < -1$ le *ipocicloidi*, per $\alpha = 1$ le *cicloidi*, per $-1 < \alpha < 0$ le *epicicloidi*, per $\alpha = 0$ le *sviluppati di circolo*, per $\alpha < 0$ due famiglie di *linee pseudocicloidali*, cuspidate o no secondo il segno di $\beta^2 - \alpha\gamma$, e separate, per così dire, dalle *spirali logaritmiche*, per le quali si ha $\beta^2 = \alpha\gamma$. Se si osserva che

$$\rho_1 = \alpha s + \beta = \sqrt{\alpha \rho^2 + (\beta^2 - \alpha\gamma)},$$

la (29) dà

$$x = -\frac{\rho_1}{\rho}, \quad y = -\frac{1}{k} \sqrt{\alpha \rho^2 + (\beta^2 - \alpha\gamma)},$$

e dal paragone col precedente valore di x risulta $k=1+\alpha$, $k^2 R^2 = \beta^2 - \alpha\gamma$, vale a dire che il raggio del circolo direttore è dato dalla formola

$$R = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{1 + \alpha},$$

e così si spiega (*cf.* I, 8, d) perchè una delle due famiglie di linee pseudocicloidali è sprovvista di cuspidi: queste debbono infatti appartenere (§ 15) alla circonferenza direttrice, immaginaria quando $\beta^2 < \alpha\gamma$. Il valore di R diventa infinito per $\alpha = -1$, nullo per $\beta^2 = \alpha\gamma$. Dunque *la curva di Ribaucour e la spirale sinusoidale d'indice 0 sono la cicloide e la spirale logaritmica*, rispettivamente. Se poi si osserva che, quando ρ si annulla, si ha $x = -R, y = 0$,

si riconosce che il polo è precisamente il punto di concorso delle tangenti cuspidali, vale a dire che la circonferenza direttrice è quella appunto a cui si è dato in principio (I, 8, c) questo nome. Finalmente le proprietà segnalate nel § 13 assumono per $n=0$ una forma semplicissima: *il centro di curvatura di una linea cicloidale, in un punto M, appartiene alla polare di M rispetto al circolo direttore. Inoltre le circonferenze descritte sui raggi di curvatura di una linea cicloidale tagliano ortogonalmente la direttrice ed involuppano una seconda linea, inversa della prima.*

17. Se si fa tendere c a zero o all'infinito, secondo il valore di n , si può fare in modo che $c^{\frac{2n}{n-1}}$ aumenti indefinitamente con R ; ma il rapporto di queste quantità avrà il valore finito e determinato $a^{\frac{n+1}{n-1}}$ se si pone

$$R = c \left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} .$$

Allora l'equazione (34) diventa

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} - 1}} . \quad (35)$$

Questa è l'equazione intrinseca delle linee di Ribaucour. Già sappiamo che per $n=1$ si deve trovare un *circolo*, per $n=0$ una *cicloide*, per $n=-2$ una *parabola*; ed effettivamente per $n=0$ la (35) dà $s^2 + \rho^2 = a^2$, e per $n=-2$ si ritrova la prima equazione (15). Per $n=3$ e per $n=-5$ si ottengono le altre curve

$$s = 2 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^4 - 1}} , \quad s = \frac{2}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}} ,$$

notevoli perchè basta cambiare s in $\frac{2}{3}s$ e $2s$, rispettivamente, per ottenere le equazioni della lemniscata e dell'iperbole equilatera. Per $n=-\frac{1}{3}$ si ottiene una curva che fa parte del sistema di curve parallele (II, 8) rappresentato dall'equazione

$$s = -\frac{1}{2} \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(b+\rho)(a-b-\rho)}} ,$$

e siccome per $b = \frac{1}{2}a$ si trova $4s^2 + \rho^2 = \text{costante}$, si può dire (I, 8, c) che *la curva di Ribaucour d'indice $-\frac{1}{3}$ è parallela ad un'asteroide*. Finalmente, se si fa crescere n all'infinito, si ottiene una catenaria di uguale resistenza; ma questa non è una linea di Ribaucour, e ciò si spiega subito ricordando che all'equazione (34) si è giunti supponendo n finito.

18. È necessario osservare che per le curve di Ribaucour si può ben sostituire la direttrice alla polare di M rispetto al circolo direttore. Si noti, infatti, che quest'ultima, e non la direttrice, è la retta che deve determinare sulla normale un segmento proporzionale a ρ ; ma è chiaro che altrettanto si può dire della direttrice, giacchè questa è situata a metà distanza fra M ed il limite della sua polare. Del resto, se q è il segmento di normale determinato dalla perpendicolare a OM, situata alla distanza $r-R$ da M, e che, per conseguenza, tocca la circonferenza e tende a confondersi con essa quando R cresce all'infinito, si ha

$$r-R=q \operatorname{sen} \theta \quad , \quad \lim \frac{r}{R} = 1 .$$

Dunque la (28) diventa

$$\left(1 + \frac{R}{r}\right) q = (n+1) \rho ;$$

poi, per R infinito, $2q = (n+1)\rho$. Osserviamo, per finire, che la formola (32) dà

$$\rho^{-\frac{n+1}{n-1}} = \lim \frac{y}{c^{\frac{2n}{n-1}}} = \lim \frac{r}{R} \lim \frac{R \operatorname{sen} \theta}{c^{\frac{2n}{n-1}}} = a^{-\frac{n+1}{n-1}} \operatorname{sen} \theta ;$$

quindi

$$\rho = a(\operatorname{sen} \theta)^{-\frac{n-1}{n+1}} \quad , \quad \lim (r-R) = \frac{n+1}{2} a(\operatorname{sen} \theta)^{\frac{2}{n+1}} .$$

La discussione di queste formole mostra che *la direttrice d'una linea di Ribaucour è normale alla curva* in tutti i punti, reali o immaginari, di minore o maggior contatto della curva con le sue tangenti. *Le curve con indice $n < -1$ non incontrano la direttrice*, e però *son prive di flessi e di cuspidi*; per quelle che hanno l'indice maggiore 0, in valore assoluto, minore di 1, la curvatura, sulla direttrice, diventa rispettivamente nulla o infinita. Nelle vicinanze della direttrice la curva tende ad essere rappresentata, in virtù di (35), dall'equazione $\rho^2 s^{n-1} = \text{costante}$, e però sono applicabili anche alle curve di Ribaucour le osservazioni fatte in fine del § 15. Sono importanti, fra tutte, le curve per le quali il rapporto $\rho:q$ è un numero intero ν , cioè le curve d'indice $\frac{2}{\nu} - 1$. Ribaucour le ha distribuite in quattro generi: si hanno, per $\nu > 0$, i generi *cicloidale* e *circolare*, per $\nu < 0$ i generi *parabolico* e *catenoidico*, secondo che ν è pari o dispari in ciascun caso. Si noti che le curve più semplici nei quattro generi corrispondono ai valori 0, 1, -2, -3 dell'indice ($\nu = 2, 1, -2, -1$), e sono appunto la cicloide, il circolo, la parabola, la catenaria, dalle quali prendono nome i rispettivi generi.

19. Basta porre $R=0$ in (34) per ottenere l'equazione intrinseca delle

spirali sinusoidi:

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}. \quad (36)$$

Si noti che, se si moltiplica s per $1 + \frac{1}{n}$, l'equazione precedente rappresenta invece una curva di Ribaucour d'indice $2n-1$. Già sappiamo che per $n=1$ si ha un *circolo*, per $n=0$ una *spirale logaritmica*, per $n=-2$ un' *iperbole equilatera*. Per $n=-\frac{1}{2}$ e per $n=-2$ l'equazione (36) si riduce alle due (15), che rappresentano la *parabola* e l'*iperbole equilatera*. Se si osserva che nel vertice della parabola il polo deve dividere per metà il raggio di curvatura, e che d'altra parte p è la lunghezza di tale raggio, si vede che, nel caso della parabola, il polo è il fuoco. Per l'iperbole equilatera già sappiamo (§ 16, *b*) che il polo è il centro. Per $n=\frac{1}{2}$ l'equazione (36) dà $s^2 + 9\rho^2 = \text{costante}$, e per $n=2$ si trova l'equazione (§ 11) della lemniscata. Dunque *le spirali sinusoidi definite dagli indici $\frac{1}{2}$ e 2 sono la cardioide (I, 8, *c*) e la lemniscata*. Le osservazioni fatte nel § 15 permettono di aggiungere che il polo della prima sta nell'unica cuspidè che la curva possiede, ed il polo dell'altra è il centro, perchè in questo, come si è visto, la curva s'infilette. Finalmente per $n=\frac{1}{3}$ si ottiene una curva che fa parte del sistema di curve parallele, rappresentate dall'equazione

$$s = -2 \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(b+\rho)(a-b-\rho)}},$$

e poichè questa, per $b = \frac{1}{2}a$, diventa $s^2 + 4\rho^2 = \text{costante}$, equazione d'una epicloide a due cuspidi, si vede che *la spirale sinusoidè d'indice $\frac{1}{3}$ è parallela ad una certa epicloide*.

20. Le proprietà trovate nel § 13 assumono una forma più semplice nel caso delle spirali sinusoidi. Per esempio: *le circonferenze tangenti ad una spirale sinusoidè, condotte dal polo, staccano dalle normali segmenti proporzionali ai raggi di curvatura*. Ciò risulta immediatamente dall'eguaglianza di definizione (28), che nel caso attuale diventa $r = (n+1)\rho \text{sen}\theta$, e ci svela con molta facilità altre proprietà delle spirali sinusoidi. Così, chiamate χ e ψ le inclinazioni della normale e del raggio vettore sopra una normale fissa, e scritta la predetta uguaglianza sotto la forma

$$\frac{1}{\rho} = (n+1) \frac{\text{sen}\theta}{r},$$

se ne trae, integrando, dopo aver ricordato che

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{\text{sen}\theta}{r},$$

$\chi = (n+1)\psi$, ed in questo risultato si ravvisa immediatamente l'estensione d'una nota proprietà (§ 11) della lemniscata. Ne segue che, *quando il raggio vettore ruota uniformemente intorno al polo, altrettanto fa la tangente intorno al punto di contatto*. A questa proprietà si deve la denominazione (troppo lunga) di *curve ad inflessione proporzionale*, proposta da Laquiere per le curve abitualmente chiamate, con doppia improprietà, spirali sinusoidi. Ora per $R=0$, ponendo, come già si è dovuto fare nel ridurre (34) a (36), $c:a = (n+1)^{\frac{n-1}{2n}}$, le formole (31) e (33) danno

$$r = (n+1)a \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{1}{n-1}}, \quad y = (n+1)a \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{n+1}{n-1}}.$$

Intanto la stessa equazione intrinseca delle spirali sinusoidi mostra che ρ non può annullarsi se non quando n è compreso fra 0 ed 1. D'altra parte la prima delle due formole che precedono ci dice che, quando la curvatura diventa nulla o infinita, il raggio r diventa infinito o si annulla secondo che n è o non è negativo. Adunque, non le sole spirali d'indice $n < -1$, come si è detto nel § 15, ma *tutte le spirali sinusoidi con indice negativo hanno la proprietà di non contenere il polo*. Questo è invece sempre un punto della curva quando $n \geq 0$; e poichè la (36), in vicinanza dei valori 0 e ∞ di ρ , prende la forma $\rho = ks^{1-n}$, si vede (I, 11, e) che *le spirali sinusoidi con indice positivo s'inflettono nel polo, o ne regrediscono, secondo che l'indice è il quoziente d'un numero pari per un numero dispari, o viceversa; e vi si comportano come in un punto ordinario quando l'indice è il quoziente di due numeri dispari*, sebbene vi abbiano un maggiore o minor contatto con la tangente secondo che n è minore o maggiore di 1. Fra queste spirali e quelle che non contengono il polo ($n < 0$) sta la spirale logaritmica ($n=0$). Mentre le prime hanno tutti i punti a distanza finita, le altre si estendono all'infinito; e se immaginiamo che l'indice vada decrescendo continuamente, il suo passaggio per lo zero segna il momento in cui la curva abbandona il polo per espandersi all'infinito: ciò spiega come avviene che, in quell'istante solo, la curva è assintotica al polo. Finalmente, quando $n < 0$, il raggio di curvatura può soltanto diventare infinito, ed allora diventano infiniti anche r ed s , mentre y tende a zero o all'infinito secondo che il valore assoluto di n è maggiore o minore di 1. Ne segue che *le sole spirali sinusoidi con indice $n < -1$ son dotate di assintoti, a distanza finita; e questi assintoti escono dal polo, e determinano intorno ad esso tante regioni angolari di eguale ampiezza $\frac{\pi}{n}$* . Infatti, quando il punto si allontana indefinitamente sopra un ramo che ammette un assintoto, θ tende ad un multiplo di π . Ora, se $\lim \theta = -v\pi$, si ha

$$\lim \psi = \frac{1}{n} \lim \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = (2v+1) \frac{\pi}{2n},$$

e due simili valori, corrispondenti a due valori consecutivi di ν , differiscono appunto per $\frac{\pi}{n}$.

21. Trasformazioni: *a)* Le spirali sinusoidi sono notevoli anche per la grande facilità con cui si lasciano dedurre le une dalle altre mercè varie trasformazioni. Così, per esempio, se si proietta il polo, in M' , sulla tangente ad una spirale (M) d'indice n , si sa che le coordinate del polo rispetto ad (M') sono $r' = y$, $\theta' = \theta$, e d'altra parte il raggio di curvatura è dato (II, 7, l) dalla formola

$$\rho' = \frac{r^3}{2r - \rho \operatorname{sen} \theta} = \frac{n+1}{2n+1} r = \frac{r'}{(n'+1) \operatorname{sen} \theta'}$$

ponendo $n' = \frac{n}{n+1}$. Dunque la pedale d'una spirale d'indice n , rispetto al polo, è una spirale d'indice $\frac{n}{n+1}$. Per esempio, le pedali della spirale logaritmica (rispetto al punto assintotico), della parabola (rispetto al fuoco), della circonferenza di circolo (rispetto ad un suo punto), dell'iperbole equilatera (rispetto al centro), sono rispettivamente una spirale logaritmica, una retta, una cardioide, una lemniscata; la pedale d'una cardioide rispetto al punto di regresso è parallela ad un'epicicloide; ecc. Più generalmente, se n è un numero intero, la spirale d'indice $\frac{1}{n}$ è la $(n-1)^{\text{ma}}$ pedale d'una circonferenza di circolo rispetto ad uno dei suoi punti; la spirale d'indice $\frac{2}{2n+1}$ è la n^{ma} pedale di un'iperbole equilatera rispetto al centro; ecc.

b) Similmente, se si applica la trasformazione (II, 7, k) d'indice ν , dopo aver osservato che $a^{\nu-1} r' = r^\nu$, si ha

$$\rho' = \frac{\nu r' \rho}{r + (\nu-1) \rho \operatorname{sen} \theta} = \frac{\nu r'}{(n+\nu) \operatorname{sen} \theta} = \frac{r'}{(n'+1) \operatorname{sen} \theta'}$$

ponendo $n' = \frac{n}{\nu}$. Dunque la trasformata d'indice ν d'una spirale d'indice n è una spirale d'indice $\frac{n}{\nu}$. In particolare la pedale d'una spirale d'indice n può anche dedursi da questa curva mediante una trasformazione d'indice $n+1$. Per $\nu = -1$ si vede che due spirali sinusoidi, con indici uguali ed a segni opposti, sono curve inverse. Sono per esempio inverse l'una dell'altra le seguenti linee: due spirali logaritmiche, retta e circolo, parabola e cardioide, iperbole equilatera e lemniscata. Per altri valori di ν si riconosce che le trasformate d'indice 2 della retta e del circolo sono una parabola ed una cardioide, le quali sono anche trasformate d'indice 4 dell'iperbole equilatera e della lemniscata; ecc. Osserviamo per finire che tutte queste curve si deducono facilmente dal circolo, prendendo come polo un punto della circonferenza, e la tangente in questo come asse polare. Infatti ogni spirale sinusoidale d'indice n deriva dal circolo con una trasformazione d'indice $\frac{1}{n}$.

IV. CONTATTO ED OSCULAZIONE.

1. Quando, in un punto M , due curve si toccano, cioè quando le loro tangenti in M coincidono, può accadere che coincidano anche i centri di curvatura. Allora, trasportate le origini in M , le due curve si possono considerare, nel dominio di M , come rappresentate, a prescindere da infinitesimi, da una stessa equazione intrinseca. Esse sono pertanto, in quel dominio, *più che tangenti*, giacchè una determinata equazione intrinseca non può rappresentare che una curva sola; e poichè questo maggior contatto si manifesta quando la differenza $\rho - \rho'$ dei raggi di curvatura in due punti definiti, sulle due curve, da uno stesso valore di s , è infinitesima insieme ad s , è ben naturale assumere come indice del contatto più o meno stretto l'ordine d'infinitesimo di $\rho - \rho'$. Siccome poi nel caso generale (contatto *semplice*) $\rho - \rho'$ non è infinitesimo, converremo di dire che le due curve *hanno un contatto dell'ordine* n quando $\rho - \rho'$ è infinitesimo dell'ordine $n - 1$, dimodochè il contatto semplice si potrà chiamare del primo ordine. In tutto ciò è implicita la supposizione che ρ e ρ' siano finiti; noi supporremo ancora che siano sviluppabili, nel dominio di M , secondo le potenze intere e positive di s , e limiteremo in tal modo il nostro studio al contatto nei punti ordinarii, pur non lasciando di esortare il lettore ad affrontare le molte piccole difficoltà che presenta lo studio completo del contatto di due curve nei punti (flessi, cuspidi, punti assintotici, ecc.) intorno ai quali non è sempre possibile l'accennata forma di sviluppo.

2. Se si attribuisce l'indice 0 a tutte le quantità calcolate in M , si ha

$$\rho = \rho_0 + s \left(\frac{d\rho}{ds} \right)_0 + \frac{s^2}{2} \left(\frac{d^2\rho}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{6} \left(\frac{d^3\rho}{ds^3} \right)_0 + \dots,$$

ed un'analogha eguaglianza si può scrivere per ρ' . Dunque, affinchè $\rho - \rho'$ sia infinitesimo dell'ordine $n - 1$, occorre e basta che si abbia

$$\rho_0 = \rho'_0, \left(\frac{d\rho}{ds} \right)_0 = \left(\frac{d\rho'}{ds} \right)_0, \dots, \left(\frac{d^{n-2}\rho}{ds^{n-2}} \right)_0 = \left(\frac{d^{n-2}\rho'}{ds^{n-2}} \right)_0, \left(\frac{d^{n-1}\rho}{ds^{n-1}} \right)_0 \geq \left(\frac{d^{n-1}\rho'}{ds^{n-1}} \right)_0.$$

D'altra parte la nota (II, form. 13) legge di formazione dei raggi di curvatura $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ delle successive sviluppate mostra facilmente che si ha

$$\rho_n = \rho^n \frac{d^n \rho}{ds^n} + \dots, \quad \frac{d^n \rho}{ds^n} = \frac{\rho_n}{\rho^n} + \dots \quad (1)$$

omettendo di scrivere, nella prima eguaglianza, tutte le derivate di ordine

inferiore ad n , e nella seconda tutti i termini che non contengono ρ_n . Si vede così che ρ_n dipende dalle sole prime n derivate di ρ , e certamente dalla n^{ima} , e che l'espressione della derivata n^{ima} di ρ contiene ρ_n , ma non ρ_{n+1} , ρ_{n+2} , ecc. Ciò premesso, è chiaro che le condizioni trovate equivalgono alle altre

$$\rho = \rho', \rho_1 = \rho'_1, \rho_2 = \rho'_2, \dots, \rho_{n-2} = \rho'_{n-2}, \rho_{n-1} \geq \rho'_{n-1} \quad (\text{nel punto } M).$$

Dunque, perchè due curve abbiano, in un dato punto, un contatto dell'ordine n , è necessario e sufficiente che, in quel punto, i primi $n-1$ centri di curvatura d'una curva coincidano con quelli dell'altra, ma restino distinti i centri n^{imi} . Da questa proposizione risulta che, se due curve hanno un contatto dell'ordine n , le loro v^{ime} sviluppate ne hanno uno di ordine $n-v$, e però la proposizione stessa si può enunciare così: *affinchè due curve abbiano un contatto dell'ordine n occorre e basta che le loro $(n-1)^{\text{ime}}$ sviluppate si tocchino semplicemente.*

3. Si può ritenere come evidente che, quanto più rapidamente cresce in valore assoluto, a partire da un punto, la curvatura d'una linea, tanto più questa tende a scostarsi dalla tangente in quel punto, e che, di due curve tangenti, quella che ha la curvatura maggiore nel comune punto di contatto tende più dell'altra ad allontanarsi dalla tangente. Del resto ciò si giustifica pienamente con un più accurato studio del contegno delle due curve nel dominio del punto di contatto (I, 4). Ora, se n è dispari, il rapporto di $\rho - \rho'$ ad s^{n-1} finisce per prendere un segno determinato, qualunque sia il segno di s , e però, nel dominio di M , una delle curve è interna all'altra; ed è questo, evidentemente, il caso generale. Se n è pari, s^{n-1} cambia segno con s , e però si ha $\rho > \rho'$ da una parte di M , e $\rho < \rho'$ dall'altra, cioè le due curve si attraversano. Dunque *due curve si possono attraversare nel punto stesso in cui si toccano; ma è questo un sicuro indizio di contatto superiore.* Invece, se le due curve si toccano senza incrociarsi, come avviene in generale, non sempre si ha un contatto semplice, perchè si è visto che si può eccezionalmente avere anche un contatto superiore; ma in questo caso l'ordine è dispari, e siccome $\rho - \rho'$ conserva un certo segno intorno allo zero, si può aggiungere che *la differenza $\rho - \rho'$ è minima o massima nel punto che si considera.*

4. **Osculazione.** Fissato un punto M sopra una curva, e data una seconda curva $f(s, \rho) = 0$, è possibile trovare uno o più punti M' della seconda curva, tali che, portando a coincidere M' con M , e la tangente in M' con la tangente in M , il contatto, che in generale è del primo ordine, risulti invece del secondo: basta infatti risolvere l'equazione della seconda curva rispetto ad s , sostituendo a ρ il valore che ha il raggio di curvatura nel punto M della prima curva. Invece di darsi la curva (M') si cerchi di sce-

circoli che toccano la curva nel medesimo punto. Se immaginiamo che il centro O d'un circolo tangente percorra in un dato senso la normale, muovendo dall'infinito per tornare all'infinito, potrà una volta sola accadere che la circonferenza attraversi la curva, mentre per ogni altra posizione di O la curva è, nel dominio di M , tutta interna (come avviene manifestamente quando O si allontana all'infinito) o tutta esterna (come quando O tende a confondersi con M) alla circonferenza corrispondente. Nella semplice infinità di circoli osculatori ad una curva, alcuni possono surosculare la curva in punti speciali, e siccome allora il contatto è generalmente del terzo ordine, si può, per l'osservazione finale del § 3, affermare che $\rho - \rho'$, cioè ρ è minimo o massimo. Viceversa, se ρ è minimo o massimo, il contatto dovrà essere di ordine superiore dispari, e però, immaginando che il punto di contatto vada percorrendo la curva sempre in un senso, ogni volta che il circolo osculatore diventa minimo o massimo il contatto si eleva almeno al terzo ordine, ed in ogni caso è di ordine dispari. Allora il circolo osculatore cessa di attraversare la curva; è questo, dunque, un sicuro indizio di surosculazione, che si manifesta evidentemente ogni volta che, nel dominio d'un punto, la curva è simmetrica rispetto alla normale.

6. Supponiamo che le curve (M'), invece di essere rappresentate dalla (2), siano date mediante la loro equazione cartesiana, relativa alla tangente ed alla normale in un punto M d'una data curva, ed ammettiamo la possibilità dello sviluppo di y , nel dominio di M , secondo le potenze intere e positive di x :

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \dots \quad (4)$$

Questo sviluppo, per opportune determinazioni dei coefficienti, conviene a qualunque curva tangente in M alla curva data, ed in particolare conviene alla stessa (M). Per determinare i coefficienti relativi alla (M) basta (II, 5) derivare (4) e identificare con (4) l'equazione derivata. Si ottiene

$$A = \frac{1}{2\rho} \quad , \quad B = \frac{1}{3} \frac{dA}{ds} \quad , \quad C = \frac{1}{4} \frac{dB}{ds} + \frac{A^2}{2\rho} \quad , \quad \dots\dots\dots$$

cioè

$$A = \frac{1}{2\rho} \quad , \quad B = -\frac{\rho_1}{6\rho^3} \quad , \quad C = \frac{3(\rho^2 + \rho_1^2) - \rho\rho_2}{24\rho^5} \quad , \quad \dots\dots \quad (5)$$

La stessa legge di formazione di questi coefficienti mostra che il v^{simo} coefficiente dipende solo dai primi v raggi di curvatura, e certamente dal raggio v^{simo} . Dunque, per tutte le curve che hanno, in M , un contatto dell'ordine n con (M), i primi $n-1$ coefficienti dello sviluppo (4) dovranno avere gli stessi valori. Ed ora, per determinare la curva (M') osculatrice ad (M), basta portare in (4) i valori (5), poi sostituire lo sviluppo (4) nell'equazione di (M'), trascurando pure le potenze di x , di grado superiore ad n . Si ottiene in tal modo un'eguaglianza che dev'essere soddisfatta identicamente, e ciò permette di determinare i coefficienti nell'equazione di (M'). Qui vogliamo no-

tare che, se si scrive lo sviluppo (4) per una curva qualunque, che abbia un contatto dell'ordine n con (M), i primi coefficienti non uguali dei due sviluppi sono i coefficienti n^{mi} , perchè dipendono certamente da ρ_{n-1} e da $\rho'_{n-1} \leq \rho_{n-1}$. Dunque la differenza $y-y'$ delle ordinate è infinitesima dell'ordine $n+1$, cioè le due curve si possono considerare come coincidenti, nel dominio del punto di contatto, a prescindere da infinitesimi di ordine superiore ad n . Dopo ciò è facile rendere più precise le affermazioni del § 3. Finalmente osserviamo che, invece dell'unico sviluppo (4), è talvolta preferibile l'uso analogo degli sviluppi di x e di y in funzione di s . Dalle relazioni

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi,$$

si deduce, con successive derivazioni,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad \frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{\cos \varphi}{\rho^2} + \frac{\rho_1 \sin \varphi}{\rho^3}, \quad \frac{d^4x}{ds^4} = \frac{3\rho_1 \cos \varphi}{\rho^4} + \frac{\rho^2 + \rho\rho_2 - 3\rho_1^2}{\rho^5} \sin \varphi, \dots,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}, \quad \frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{\sin \varphi}{\rho^2} - \frac{\rho_1 \cos \varphi}{\rho^3}, \quad \frac{d^4y}{ds^4} = \frac{3\rho_1 \sin \varphi}{\rho^4} - \frac{\rho^2 + \rho\rho_2 - 3\rho_1^2}{\rho^5} \cos \varphi, \dots;$$

quindi

$$x = s - \frac{s^3}{6\rho^2} + \frac{\rho_1 s^4}{8\rho^4} + \dots, \quad y = \frac{s^2}{2\rho} - \frac{\rho_1 s^3}{6\rho^3} - \frac{(\rho^2 + \rho\rho_2 - 3\rho_1^2)s^4}{24\rho^5} + \dots \quad (6)$$

7. Applicazioni: a) Il numero delle coniche è doppiamente infinito dal punto di vista intrinseco. Ne segue che una conica si potrà chiamare osculatrice ad una curva quando avrà con essa un contatto del quarto ordine. Ora, se nell'equazione della conica

$$y = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy) \quad (7)$$

si sostituiscono gli sviluppi (6), trascurando le potenze di s di grado superiore al quarto, si riesce facilmente a determinare α, β, γ in funzione dei raggi di curvatura ρ, ρ_1, ρ_2 della data curva (M). Invece degli sviluppi (6) è forse preferibile, nel caso attuale, adoperare l'unico sviluppo (4), limitandolo ai primi tre termini, e trascurando, nel sostituire in (7), le potenze di x dalla quinta in su. In un modo o nell'altro si perviene ai seguenti risultati:

$$\alpha = \frac{1}{\rho}, \quad \beta = \frac{9\rho^2 + 5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2}{9\rho^3}, \quad \gamma = -\frac{\rho_1}{3\rho^2}. \quad (8)$$

Dunque l'equazione della conica osculatrice è

$$(3\rho x - \rho_1 y)^2 + (9\rho^3 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2)y^2 = 18\rho^3 y.$$

b) Se si vuole che il contatto sia soltanto del terzo ordine, si hanno infinite coniche, rappresentate sempre dall'equazione (7), in cui α e γ hanno i valori (8), mentre β , unico coefficiente che dipende da ρ_2 , resta arbitrario. Per $\beta = \gamma^2 : \alpha$ si ottiene una parabola, e per $\beta = -\alpha$ un'iperbole equilatera. Ne segue che le equazioni della parabola osculatrice e dell'iperbole equilatera oscula-

trice sono rispettivamente

$$(3\rho x - \rho_1 y)^2 = 18\rho^3 y \quad , \quad x^2 - y^2 - \frac{2\rho_1}{3\rho} xy = 2\rho y \quad .$$

c) Per determinare la grandezza degli assi della conica osculatrice bisogna ricordarsi (III, form. 8) che si ha

$$a^2 + b^2 = \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{\Delta^2} \quad , \quad ab = \frac{\alpha}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \quad ,$$

dove $\Delta = \alpha\beta - \gamma^2$. Se per brevità si pone

$$\mathcal{P} = 9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2 \quad , \quad \mathcal{R} = 18\rho^2 + 5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2 \quad ,$$

i valori (8) danno

$$\alpha + \beta = \frac{\mathcal{R}}{9\rho^2} \quad , \quad \Delta = \frac{\mathcal{P}}{9\rho^4} \quad , \quad (9)$$

e le formole precedenti diventano

$$a^2 + b^2 = \frac{9\mathcal{R}\rho^4}{\mathcal{P}^2} \quad , \quad ab = \frac{27\rho^2}{\mathcal{P}^{\frac{3}{2}}} \quad . \quad (10)$$

Da queste si ricava

$$a = \frac{3\rho^2}{\mathcal{P}\sqrt{2}} \sqrt{\mathcal{R} + \sqrt{\mathcal{R}^2 - 36\mathcal{P}\rho^2}} \quad , \quad b = \frac{3\rho^2}{\mathcal{P}\sqrt{2}} \sqrt{\mathcal{R} - \sqrt{\mathcal{R}^2 - 36\mathcal{P}\rho^2}} \quad .$$

Si noti che il radicale inferiore è sempre reale, perchè si ha identicamente

$$\mathcal{R}^2 - 36\mathcal{P}\rho^2 = (5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2)^2 + 36\rho^2\rho_1^2 \quad .$$

8. Invarianti. Per qualunque curva d'una famiglia (2), costituita da un numero $n-2$ volte infinito di linee, esiste una funzione dei primi n raggi di curvatura, che resta costantemente uguale a zero lungo tutta la curva. Derivando infatti l'ultima delle (3) si ottiene un'altra relazione

$$f_{n-1}(s, \rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) = 0 \quad ,$$

che deve aver luogo identicamente per tutte le curve (2). Ora, se si eliminano $s, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ dal sistema costruito aggregando l'ultima equazione e la stessa (2) al sistema (3), si giunge ad una relazione

$$F(\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}) = 0 \quad , \quad (11)$$

il cui primo membro è appunto l'invariante della famiglia (2). La conoscenza dell'invariante permette di costruire, in ogni punto, il centro n^{imo} di curvatura, quando sono conosciuti i primi $n-1$ centri, e la costruzione che si ottiene caratterizza le curve (2). È infatti evidente che ogni invariante conviene ad una ben determinata famiglia di curve, alla cui equazione si può dunque sostituire la conoscenza dell'invariante stesso. Per convincersene si noti che, sostituendo i valori (1) nella (11), questa diventa un'equazione differenziale dell'ordine $n-1$, dalla quale si risale, integrando, ad un'equa-

zione in s e ρ , che racchiude $n-1$ costanti arbitrarie; ma, di tali costanti, $n-2$ costituiscono il sistema di parametri, che comparisce nell'equazione (2), e l'ultima è determinata dalla scelta dell'origine degli archi. Ma non il solo n^{mo} centro si può costruire quando si conosce l'invariante, si bene anche tutti i centri successivi. Infatti noi possiamo indefinitamente derivare la (11), ottenendo così tante relazioni

$$F_1(\rho, \rho_1, \dots, \rho_n) = 0, \quad F_2(\rho, \rho_1, \dots, \rho_{n+1}) = 0, \quad F_3(\rho, \rho_1, \dots, \rho_{n+2}) = 0, \dots \quad (12)$$

le quali porgono successivamente i valori di $\rho_n, \rho_{n+1}, \rho_{n+2}, \dots$ in funzione di $\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-2}$. L'annullarsi dell'invariante F in un dato punto d'una curva (M) indica che la curva (2), osculatrice in quel punto alla (M), ha in comune con questa anche il centro n^{mo} di curvatura, vale a dire che l'ordine del contatto oltrepassa n , cioè si ha *surosculazione*. Osserviamo finalmente che se fra la (11) e le prime ν relazioni (12) si eliminano $\rho, \rho_1, \dots, \rho_{\nu-1}$, si ottiene una relazione

$$F^{(\nu)}(\rho_\nu, \rho_{\nu+1}, \dots, \rho_{n+\nu-1}) = 0,$$

e si può subito affermare che $F^{(\nu)}(\rho, \rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ è l'*invariante della famiglia costituita dalle ν^{mo} sviluppate* delle curve della data famiglia (2). Affinchè in un punto d'una data curva avvenga un contatto dell'ordine $n+\nu$, con una curva della famiglia (2), occorre e basta che in quel punto si annullino $F, F', F'', \dots, F^{(\nu-1)}$, ma non si annulli $F^{(\nu)}$.

9. Esempii: a) Le *linee cicloidali* (cfr. II, 13, g) costituiscono una famiglia doppiamente infinita di curve, caratterizzata dall'invariante $\rho_1 \rho_2 - \rho \rho_3$; ma se le dette linee si particolarizzano in modo che dall'intera famiglia se ne stacchi una semplice infinità, l'invariante non deve più contenere ρ_3 , ed effettivamente si trova che gli invarianti delle *sviluppati di circolo*, delle *spirali logaritmiche*, delle *cicloidi*, delle *pseudocicloidi*, delle *ipocicloidi tricuspidi*, ecc., sono rispettivamente $\rho_2, \rho_1^2 - \rho \rho_2, \rho + \rho_2, \rho - \rho_2, 9\rho + \rho_2$, ecc.

b) Gli invarianti delle *parabole* e delle *iperboli equilatera* sono appunto le quantità designate (§ 7, c) con \mathcal{P} ed \mathcal{H} , perchè queste sono funzioni di ρ, ρ_1, ρ_2 , che in virtù delle (9) si annullano rispettivamente su qualunque parabola e su qualunque iperbole equilatera. Inoltre la seconda formola (10) mostra che la conica osculatrice ad una curva è iperbole o ellisse secondo che \mathcal{P} è negativo o positivo. I valori di s che annullano \mathcal{P} o \mathcal{H} definiscono su qualunque curva i punti di surosculazione con una parabola o con un'iperbole equilatera.

c) Per trovare l'invariante \mathcal{C} dell'intera famiglia delle coniche basta derivare l'una o l'altra eguaglianza (10). Si ottiene in tal modo \mathcal{C} sotto una delle seguenti forme

$$\mathcal{C} = 8\mathcal{H}\rho_1 - 3\rho^2 \frac{d\mathcal{H}}{ds} = -3\rho^{\frac{14}{3}} \frac{d}{ds} \frac{\mathcal{H}}{\rho^{\frac{8}{3}}}, \quad \mathcal{C} = 10\mathcal{P}\rho_1 - 3\rho^2 \frac{d\mathcal{P}}{ds} = -3\rho^{\frac{16}{3}} \frac{d}{ds} \frac{\mathcal{P}}{\rho^{\frac{10}{3}}}.$$

Eseguendo il calcolo in un modo o nell'altro si trova che l'*invariante delle coniche* è

$$\mathcal{C} = 36\rho^2 \rho_1 + 40\rho_1^3 - 45\rho \rho_1 \rho_2 + 9\rho^2 \rho_3.$$

Finalmente le formole (10) permettono anche di esprimere \mathcal{C} , lungo una curva qualunque, in funzione dei semi-assi della conica osculatrice:

$$\mathcal{C} = -27\rho^{\frac{14}{3}} \frac{d}{ds} \frac{a^3 + b^3}{(ab)^{\frac{4}{3}}}, \quad \mathcal{C} = -27\rho^{\frac{16}{3}} \frac{d}{ds} \left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} \right).$$

L'ultima espressione, quando si sappia che πab misura l'area chiusa nella ellisse definita dai semi-assi a e b , conduce ad osservare, con Gravé, che l'ellisse osculatrice ad una curva, in un punto M , non può conservar costante l'area quando M percorre la curva. Si aggiunga che il segno di \mathcal{C} serve a riconoscere se l'area stessa va crescendo o decrescendo; quando diventa minima, o massima, si annulla \mathcal{C} , e però il contatto si eleva almeno al quinto ordine.

d) Notevoli son le curve definite dall'invariante

$$\mathcal{J}(\lambda, \mu) = \lambda\rho^2 + (\mu + 1)\rho_1^2 - \rho\rho_2$$

per ciascuna coppia di valori di λ e μ . Così, per esempio, $\mathcal{J}\left(3, \frac{1}{3}\right)$ e $\mathcal{J}\left(6, \frac{2}{3}\right)$ non differiscono da \mathcal{P} e da \mathcal{B} ; le catenarie di eguale resistenza sono caratterizzate da $\mathcal{J}(1, 1)$, le spirali logaritmiche da $\mathcal{J}(0, 0)$, e più generalmente $\mathcal{J}(0, \mu)$ è l'invariante delle curve che hanno l'arco proporzionale alla potenza $(1-\mu)^{\text{ima}}$ del raggio di curvatura; $\mathcal{J}(\lambda, 0)$ è l'invariante delle curve rappresentate dall'equazione

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{2\lambda \log \frac{\rho}{a}}};$$

ecc. Quando λ e μ non sono nulli, l'integrazione di $\mathcal{J}=0$ conduce all'equazione intrinseca

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \left(\left(\frac{\rho}{a} \right)^{2\mu} - 1 \right)}},$$

che rappresenta in particolare (III, form. 35, 36) le curve di Ribaucour o le spirali sinusoidi d'indice n , secondo che si fa l'una o l'altra delle seguenti ipotesi:

$$\lambda = \frac{n-1}{n+1}, \quad \mu = \frac{n+1}{n-1}; \quad \lambda = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}, \quad \mu = \frac{n}{n-1}.$$

Se poi si osserva che

$$\frac{d\mathcal{J}}{ds} = 2\lambda\rho_1 - \rho_2 + (2\mu + 1) \frac{\rho_1\rho_2}{\rho},$$

si vede subito che, quando $2\mu + 1 = 0$, l'invariante delle curve sviluppate è $2\lambda\rho - \rho_2$; e siccome questo è l'invariante delle linee cicloidal $\rho^2 = 2\lambda s^2 + \dots$, ciascuna delle quali è, in generale, sviluppata d'una linea analoga, si può dire che le curve definite dall'invariante $\mathcal{J}\left(\lambda, -\frac{1}{2}\right)$ son certe parallele a linee cicloidal: tali sono (cfr. III, 17, 19) la curva di Ribaucour d'indice $-\frac{1}{3}$ e la

spirale sinusoidale d'indice $\frac{1}{3}$. Per tutte queste curve l'interpretazione geometrica dell'eguaglianza $\mathfrak{J}=0$ conduce alla seguente semplicissima costruzione del terzo centro di curvatura, quando sian noti i primi due: se si divide CM nel rapporto di λ a $1-\lambda$, e CC₁ nel rapporto di $(\mu+1)\lambda$ a $1-(\mu+1)\lambda$, e se dal primo punto di divisione si conduce la perpendicolare alla retta che lo congiunge al secondo, tale perpendicolare passa per C₃.

e) In modo analogo si possono studiare le curve definite nel § 13 del capitolo precedente. Posto

$$\mathbf{P} = (n-1)^2 \rho^2 + (n+1)^2 \rho_1^2 + (n^2-1)(\rho_1^2 - \rho \rho_2),$$

$$\mathbf{H} = \frac{n}{n+1} [(n-1)^2 \rho^2 + (n+1)^2 \rho_1^2] + (n^2-1)(\rho_1^2 - \rho \rho_2),$$

si trova che l'invariante delle predette curve è

$$\mathbf{C} = 2n\rho_1 [(2n-1)\mathbf{P} - 2(n+1)\mathbf{H}] + (n-1)(n^2-1)\rho(\rho_1\rho_2 - \rho\rho_3),$$

e che il circolo direttore ha il centro nel punto

$$x = \frac{(n^2-1)\rho^2 \rho_1}{\mathbf{P}}, \quad y = \frac{(n-1)^2 \rho^3}{\mathbf{P}}, \quad (13)$$

ed il raggio

$$R = (n-1) \frac{\rho^2}{\mathbf{P}} \sqrt{-(n+1)\mathbf{H}}.$$

Ne segue subito che \mathbf{P} ed \mathbf{H} sono gli invarianti delle curve di Ribaucour ($R=\infty$) e delle spirali sinusoidi ($R=0$), e che l'equazione del circolo direttore è

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\mathbf{P}}(n-1)\rho^2 [(n+1)\rho_1 x + (n-1)\rho y] + \frac{n+1}{\mathbf{P}}(n-1)^2 \rho^4 = 0.$$

Questa, per le curve di Ribaucour, si riduce a

$$y = \frac{n+1}{2} \rho - \frac{n+1}{n-1} \frac{\rho_1}{\rho} x \quad (14)$$

10. **Esercizii:** a) Determinare il luogo dei centri delle coniche osculatrici d'una data curva. Le coordinate del centro si possono dedurre dalle (13) per $n=-2$, o pure dalle (3) del precedente capitolo portandovi i valori (8) e (9). Applicando a tali coordinate

$$x = \frac{3\rho^2 \rho_1}{\mathcal{P}}, \quad y = \frac{9\rho^3}{\mathcal{P}} \quad (15)$$

il solito procedimento (II, 4) si ottiene

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{\mathcal{C}\rho_1}{\mathcal{P}^2}, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{3\mathcal{C}\rho}{\mathcal{P}^2},$$

e si vede che la tangente passa per M; quindi si ha

$$x = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{P}^2} \sqrt{9\rho^2 + \rho_1^2}, \quad \rho' = \frac{\mathcal{C}\rho}{\mathcal{P}^2} (9\rho^2 + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Per esempio, nel caso dell'ipocicloide tricuspide ($9s^2 + \rho^2 = \text{costante}$), si trova

$\mathcal{P} = 36a^3$, $\mathcal{R} = 45a^2$, $\mathcal{C} = -3240a^3$; poi, fissando convenientemente il senso e l'origine degli archi, le formole precedenti danno

$$s' = \frac{15s^2}{4a}, \quad \rho' = \frac{15s\rho}{8a},$$

e finalmente $9s'^2 + 4\rho'^2 = \text{costante}$. Il luogo cercato è dunque un'ipocicloide a sei cuspidi, delle quali tre coincidono con quelle della curva data.

b) Cercare l'*inviluppo delle direttrici delle parabole che osculano una data curva*. Dalla (14) si ha, per $n = -2$, l'equazione della direttrice, che per derivazione dà

$$(\rho_2 - 3\rho)x + 4\rho_1 y + 2\rho\rho_1 = 0,$$

e dalle due equazioni si ricava $x = 0, y = -\frac{1}{2}\rho$. Dunque la direttrice *tocca il suo inviluppo sulla normale alla curva*. Applicando alle coordinate del punto di contatto le solite formole fondamentali si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{9\rho^2 + \rho_1^2}}{2\rho}, \quad \rho' = \frac{(9\rho^2 + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{2\mathcal{P}}. \quad (16)$$

Per l'ipocicloide tricuspide si ha $\rho' = \frac{3}{8}a$. Dunque *le direttrici delle parabole che osculano un'ipocicloide tricuspide son tutte tangenti al circolo direttore*.

c) Invece per $\mathcal{R} = 0$, siccome allora \mathcal{P} si riduce a $-(9\rho^2 + \rho_1^2)$, le formole (16) diventano

$$\rho' = \frac{1}{2} \sqrt{9\rho^2 + \rho_1^2}, \quad s' = \int \frac{\rho'}{\rho} ds,$$

cioè

$$\rho' = \frac{3}{2} \rho \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad s' = \frac{1}{2} \int \frac{\rho^{\frac{2}{3}} d\rho}{\sqrt{\rho^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}}}},$$

e se ne trae, eliminando ρ ,

$$s' = \frac{1}{5} \int \frac{d\rho'}{\sqrt{\left(\frac{2\rho'}{3a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}.$$

Dunque *le direttrici delle parabole che osculano un'iperbole equilatera toccano una spirale senoide d'indice $-\frac{2}{3}$* .

d) Cercare il *luogo dei fuochi delle parabole osculatrici* ad una data curva. Se si osserva (III, 9, a) che il fuoco è simmetrico, rispetto alla tangente, della proiezione di M sulla direttrice, si trova che le sue coordinate sono

$$x = -\frac{3\rho^2\rho_1}{2(9\rho^2 + \rho_1^2)}, \quad y = \frac{9\rho^2}{2(9\rho^2 + \rho_1^2)};$$

quindi

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{(9\rho^2 - \rho_1^2)\mathcal{P}}{2(9\rho^2 + \rho_1^2)^2}, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{3\mathcal{P}\rho\rho_1}{(9\rho^2 + \rho_1^2)^2}.$$

Queste formole ci dicono che la normale al luogo dei fuochi divide MC nel rapporto di 1 a 3, e che la tangente divide per metà il segmento determinato dalla

direttrice sulla tangente a (M), a partire da M. Poi si ottiene

$$\frac{1}{x} = 2 \left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}} - 1 \right) , \quad \frac{\rho}{\rho'} = 2 \left(3 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}} - 5 \right) .$$

Per esempio, se $9s^2 + \rho^2 = \text{costante}$, si ha $s' = 2s, \rho' = \frac{2}{3}\rho, 9s'^2 + 25\rho'^2 = \text{costante}$. Dunque i fuochi delle parabole osculatrici d'una ipocicloide tricuspide appartengono ad un'epicicloide che ha le stesse cuspidi. Similmente, se $\mathfrak{B} = 0$, le ultime formole danno $s' = \frac{1}{3}s, \rho' = \frac{1}{10}\rho$, ed è facile dedurne che le parabole osculatrici d'una iperbole equilatera hanno i fuochi su curve definite dall'invariante $\mathfrak{J} \left(\frac{6}{25}, \frac{2}{3} \right)$. Finalmente ogni curva della famiglia definita dall'invariante $\mathfrak{J} \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6} \right)$ ha i fuochi delle sue parabole osculatrici in linea retta.

e) Determinare il luogo dei centri delle iperboli equilatera osculatrici ad una data curva. Per $\mathfrak{B} = 0$ le (15) danno

$$x = -\frac{3\rho^2\rho_1}{9\rho^2 + \rho_1^2} , \quad y = -\frac{9\rho^3}{9\rho^2 + \rho_1^2} ;$$

poi si trova

$$\frac{\delta x}{\delta s} = \frac{(9\rho^2 - \rho_1^2)\mathfrak{B}}{(9\rho^2 + \rho_1^2)^2} , \quad \frac{\delta y}{\delta s} = -\frac{6\mathfrak{B}\rho\rho_1}{(9\rho^2 + \rho_1^2)^2} ,$$

e se ne deduce

$$\frac{1}{x} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{B}} - 1 , \quad \frac{\rho}{\rho'} = 3 \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{B}} - 1 .$$

In particolare, se $9s^2 + \rho^2 = \text{costante}$, è $s' = 5s, \rho' = \frac{2}{7}\rho, 9s'^2 + 49\rho'^2 = \text{costante}$, e però i centri delle iperboli equilatera osculatrici d'una ipocicloide tricuspide appartengono ad un'epicicloide stellata, che ha le stesse cuspidi. Finalmente le curve osculate da iperboli equilatera, che hanno i centri in linea retta, son quelle della famiglia caratterizzata dall'invariante $\mathfrak{J} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{6} \right)$.

f) I calcoli precedenti si possono eseguire in modo più generale sulle curve definite dall'invariante **C**. Così dalle (13) si deduce

$$\frac{\delta x}{\delta s} = -\frac{(n+1)\mathbf{C}\rho_1}{\mathbf{P}^2} , \quad \frac{\delta y}{\delta s} = -\frac{(n-1)\mathbf{C}\rho}{\mathbf{P}^2} , \quad (17)$$

e si vede subito che la tangente al luogo dei centri dei cerchi direttori passa per M. La curva che prende il posto dell'ipocicloide tricuspide è sempre un'ipocicloide ($n < 0$) o un'epicicloide ($n > 0$) rappresentata dall'equazione

$$(n-1)^2 s^2 + (n+1)^2 \rho^2 = a^2 . \quad (18)$$

Per essa si ha

$$\mathbf{P} = \frac{2n(n-1)^2}{(n+1)^3} a^2 , \quad \mathbf{H} = \frac{(2n-1)(n-1)^2}{(n+1)^3} a^2 , \quad \mathbf{C} = \frac{4n(2n-1)(n-1)^4}{(n+1)^5} a^2 s$$

Quando $\mathbf{H} = 0$, le (17) conducono alle formole

$$\frac{1}{x} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{H}} - 1 , \quad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{n-1}{n+1} \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{H}} - 1 ,$$

mercè le quali si determina il luogo dei poli delle spirali sinusoidi, d'indice n , che osculano una data curva; e se questa è la (18), si trova una curva analoga, corrispondente al valore $2 - \frac{1}{n}$ di n .

V. LE RULLETTE.

1. Quando una curva (M_0) va rotolando, senza strisciare, sopra una curva (M), fissa nel piano, si dice che (M_0) si sviluppa su (M), le curve descritte dai punti rigidamente legati alla curva mobile si chiamano *rullette*, e la curva fissa è la *base* delle rullette stesse. Col nome di rulletta non s'intende designare una curva speciale (giacchè, scegliendo convenientemente (M) ed (M_0), ogni curva è rulletta) ma si vuole soltanto richiamare l'attenzione sopra un modo di generare la curva che si considera. Alle proprietà di cui godono le rullette si può spesso pervenire mercè considerazioni geometriche o cinematiche semplici ed eleganti, le quali tuttavia son prive di quel carattere di uniformità analitica che distingue i procedimenti intrinseci, e li rende così adatti alle ricerche di Geometria infinitesimale. Rispetto alla tangente ed alla normale che la curva mobile e la curva fissa hanno comuni nel punto di contatto M , le coordinate x ed y d'un punto P , rigidamente legato alla curva mobile, debbono soddisfare alle condizioni d'immobilità

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{y}{\rho_0} - 1, \quad \frac{dy}{ds_0} = -\frac{x}{\rho_0}. \quad (1)$$

D'altra parte, le variazioni che le coordinate stesse subiscono nel piano fisso son date (II, 1) dalle formole

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{y}{\rho} + 1, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{x}{\rho}, \quad (2)$$

purchè s'inverta il senso della direzione della normale alla sola curva fissa; e poichè, in virtù della definizione, è $ds = ds_0$, le formole (2) diventano, mercè le (1),

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{y}{R}, \quad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{x}{R}, \quad (3)$$

dove si è posto

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0}. \quad (4)$$

Dunque, dividendo l'una per l'altra le (3), si vede che l'inclinazione della tangente a (P) sulla tangente ad (M) è data dalla formola $\text{tg} \vartheta = -x:y$, vale a dire che, se r e θ sono le coordinate polari di P , è $\vartheta = \theta + \frac{1}{2}\pi$, cioè la

normale a (P), in P, passa per M. Inoltre dalle stesse (3) si deduce che il rapporto dell'arco elementare di (P) a quello di (M) è $\alpha = r:R$, cioè si ha

$$s' = \int \frac{r}{R} ds. \quad (5)$$

È anche noto (II, 4) che, fissate le direzioni positive della tangente e della normale a (P) in modo che possano, ruotando insieme, coincidere con quelle relative ad (M), si ha

$$\frac{\alpha}{\rho'} = \frac{1}{\rho} - \frac{d\theta}{ds}.$$

Intanto, per l'immobilità di P nel piano di (M₀), è soddisfatta la condizione

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds_0} = -\frac{1}{\rho_0} + \frac{\text{sen } \theta}{r}.$$

Dunque

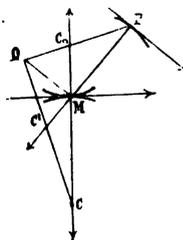
$$\frac{\alpha}{\rho'} = \frac{1}{R} - \frac{\text{sen } \theta}{r},$$

cioè

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} - \frac{Ry}{r^3}. \quad (6)$$

Se si esprimono i secondi membri di (5) e di (6) in funzione di s_0 (o di s), l'eliminazione di questa variabile conduce, in ogni caso, all'equazione intrinseca della rulletta.

2. Anche la formola (6) è suscettibile d'una semplicissima interpretazione geometrica. Se C, C₀, C' sono i centri di curvatura delle linee (M), (M₀), (P), e se si proietta C su PM, in L, e si chiama Q quel punto di PC₀, che sta sulla perpendicolare elevata per M a PM, il punto C' appartiene a QC. Infatti, se N è il punto d'incontro di QC con PM, la trasversale PQC₀ nel triangolo CMN dà



$$\frac{PN}{PM} = \frac{CC_0}{MC_0}, \quad \frac{QN}{QC} = \frac{\rho + \rho_0}{\rho_0}, \quad \frac{MN}{ML} = \frac{\rho}{R}, \quad \frac{PN - r}{\rho \text{sen } \theta} = \frac{r}{R} \cdot \frac{PN - r}{y},$$

d'onde successivamente si trae

$$\frac{PN}{PN - r} = \frac{r^2}{Ry}, \quad PN = \frac{r^3}{r^2 - Ry} = \rho' = PC',$$

cioè N è appunto C'. Dunque per costruire C' basta tracciare la retta PC₀ fino all'incontro con la perpendicolare elevata per M a PM, e congiungere a C il punto così ottenuto: tale congiungente incontra PM in C'.

3. Applicazioni: a) Una circonferenza di raggio α si sviluppa sopra un'altra che ha il raggio R: qual'è la rulletta generata da un punto P della circonferenza del primo circolo? Nelle formole precedenti bisogna supporre

$$\rho = R, \quad \rho_0 = \alpha, \quad \theta = \frac{s}{2\alpha}, \quad r = 2\alpha \text{sen } \theta.$$

Se gli archi della rulletta si contano, in senso inverso, a partire dal punto in cui la normale è anche normale alla base ($\theta = \frac{1}{2}\pi$), le formole (5) e (6) danno

$$s' = \frac{4z^2}{R} \cos \theta \quad , \quad \rho' = \frac{4z^2}{2z - R} \operatorname{sen} \theta \quad ,$$

e dalla (4) si ha

$$R = \frac{Rz}{R \mp z} \quad , \quad 2z - R = \frac{R + 2z}{R + z} z \quad .$$

Dunque, se si pone

$$a = \frac{4z^2}{R} = 4 \frac{z}{R} (R + z) \quad , \quad b = \frac{4z^2}{2z - R} = 4z \frac{R + z}{R + 2z} \quad ,$$

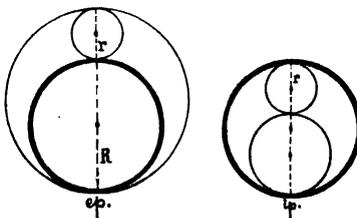
l'equazione della rulletta è

$$\frac{s'^2}{a^2} + \frac{\rho'^2}{b^2} = 1 \quad . \quad (7)$$

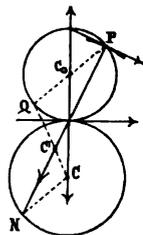
Inversamente, data questa equazione, se a e b sono le radici positive di a^2 e b^2 , si ha

$$R = \frac{ab^2}{a^2 - b^2} \quad , \quad z = \pm \frac{1}{2} \frac{ab}{a \pm b} \quad .$$

Dunque ogni linea (7) si può in due modi considerare come generata da un punto d'una circonferenza che si sviluppa sulla circonferenza direttrice. In particolare, se una circonferenza si sviluppa sopra una retta, ogni suo punto descrive una cicloide. Se $a^2 > b^2$, uno dei valori di z è positivo, come R , l'altro è negativo, ma in valore assoluto supera R , dimodochè la circonferenza mobile è sempre esterna alla base. Invece per $a^2 < b^2$ i due valori di z hanno lo stesso segno, opposto a quello di R , ed in valore assoluto sono inferiori ad R . In questo caso i cerchi mobili sono interni al circolo fisso, ed in tutti i casi la somma algebrica dei due valori di z è $-R$. Adunque si ha un'ipocicloide o un'epicicloide secondo che il circolo generatore si muove internamente o esternamente alla circonferenza direttrice.



b) Ai risultati precedenti si giunge anche con grande facilità utilizzando la costruzione data nel § 2. Da tale costruzione risulta subito che il centro di curvatura della rulletta (P) si trova su quel diametro del circolo fisso, che passa nel punto diametralmente opposto a P sulla circonferenza mobile. Ciò premesso, sia Q il detto punto, ed N il secondo punto d'incontro della normale PM con la direttrice. È facile dimostrare che CN è parallela a PQ. Ora, se si proietta dal punto C sulla normale la quaterna armonica $PC_0Q\infty$, si ottiene $PMC'N$. Dunque C' è conjugato armonico di P rispetto ad MN. Ne segue che il centro di curvatura di (P) appartiene alla polare di P rispetto al circolo direttore. D'altra parte è noto (III, 16, c) che questa proprietà caratterizza le linee cicloidali. Data una siffatta linea mediante l'equazione (7), si calcolano R ed z ricordando che le coordinate del centro del circolo direttore sono



$$x = \frac{b^2 s}{a^2 - b^2} \quad , \quad y = \frac{a^2 \rho}{a^2 - b^2} \quad , \quad (8)$$

ed osservando che la prima deve nelle cuspidi ($\rho=0, s=\pm a$) prendere il valore $\pm R$, e la seconda il valore $R+2v$ nell'origine ($s=0, \rho=\pm b$), dimodochè si ha subito

$$R = \frac{ab^3}{a^2 - b^2}, \quad R + 2v = \pm \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}.$$

c) Ora sviluppiamo una linea cicloidale sopra una retta, e cerchiamo la *rulletta generata dal centro del circolo direttore*. Dalla (4), poichè ρ è infinito, si ha $R = \rho_0$, e dalle (8), applicate alla curva (M_0),

$$r^3 = \frac{b^4 s_0^2 + a^4 \rho_0^2}{(a^2 - b^2)^2} = a^2 \frac{b^4 + (a^2 - b^2) \rho_0^2}{(a^2 - b^2)^2};$$

poi la formola (6) diventa

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{(a^2 - b^2)r^2 - a^2 \rho_0^2}{(a^2 - b^2)r^3} = \frac{a^2 b^4}{(a^2 - b^2)^2 r^3}, \quad \text{cioè } \rho' = \frac{r^3}{R^2}.$$

Similmente la (5) dà

$$s' = \int \frac{ar^2 dr}{\sqrt{(r^2 - R^2)(a^2 R^2 - b^2 r^2)}};$$

quindi, eliminando r fra le ultime due formole,

$$s' = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho'}{\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\rho'}{R}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \left(\left(\frac{\rho'}{R}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)}}.$$

Dunque (III, 7) la rulletta cercata è una conica, che ha gli assi proporzionali ad a e b , ed il parametro uguale al raggio del circolo direttore. In particolare, *quando una pseudocicloide (I, 8, d) si sviluppa sopra una retta, il suo polo descrive un'iperbole equilatera*. Un altro caso particolare si ottiene osservando che l'equazione (7) si cambia nella nota equazione della sviluppannte d'un circolo di raggio R quando, trasportata l'origine in una cuspidè, e moltiplicati s e ρ per b , si fanno crescere a e b all'infinito in modo che il rapporto di b^3 ad a tenda ad R . In queste condizioni l'ultima equazione intrinseca tende a rappresentare una parabola, e però, *se la sviluppannte d'un circolo si sviluppa sopra una retta, il centro del circolo descrive una parabola*.

d) Per una spirale sinusoidè d'indice n è noto (III, form. 28) che le coordinate del polo soddisfano alla condizione $r^2 = (n+1)\rho_0 y$, e però, supponendo ρ infinito, dimodochè $R = \rho_0$, la formola (6) dà

$$\rho' = \frac{r^3}{r^2 - \rho_0 y} = \frac{n+1}{n} r.$$

Dunque il raggio di curvatura della rulletta descritta dal polo è proporzionale al segmento di normale compreso fra la rulletta e la sua base. D'altra parte si sa (III, 18) che questa proprietà caratterizza le curve di Ribaucour, il cui indice n' è legato ad n dalla relazione

$$\frac{2}{n'+1} = \frac{n+1}{n}, \quad \text{cioè } n' = \frac{n-1}{n+1}.$$

Si trova così il seguente teorema di Bonnet: *se una spirale sinusoidè d'indice*

n si sviluppa sopra una retta, il suo polo descrive una curva di Ribaucour di indice $\frac{n-1}{n+1}$. Per esempio, facendo successivamente $n=0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, ecc., si vede che, se una spirale logaritmica si sviluppa sopra una retta, il suo polo descrive una retta; se una parabola si sviluppa sopra una retta, il suo fuoco descrive una catenaria; se una cardioide si sviluppa sopra una retta, la sua cuspidè si muove parallelamente ad un'asteroide; ecc. Il teorema di Bonnet si può anche dedurre dalla costruzione data nel § 2, in virtù della quale la retta PC_0 passa nel punto d'incontro delle perpendicolari alla base ed a PM , condotte per C' e per M . Infatti, se N è la proiezione di C_0 su PM , si ha, per la definizione delle spirali sinusoidi,

$$n = \frac{PN}{NM} = \frac{PC_0}{QC_0} = \frac{PM}{MC'} \quad , \quad \text{d'onde} \quad \frac{PM}{PC'} = \frac{n}{n+1} = \frac{n'+1}{2} \quad \text{se} \quad n' = \frac{n-1}{n+1} \quad ,$$

e l'ultima proporzione definisce appunto le curve di Ribaucour d'indice n' .

e) Su quale curva bisogna sviluppare una spirale sinusoidè perchè il suo polo descriva una retta? In questo caso è ρ' che dev'essere infinito, e però occorre che si abbia

$$r^2 = \mathcal{R}y = (n+1)\rho_0 y \quad , \quad \text{d'onde} \quad \rho_0 = -\frac{n}{n+1}\rho \quad .$$

Dunque, se

$$s_0 = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}$$

è l'equazione della spirale, quella della base incognita è

$$s = \frac{n}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}} \quad .$$

Ora si noti che questa è l'equazione d'una curva di Ribaucour, il cui indice n' è legato ad n dalla relazione

$$\frac{n'+1}{n'-1} = \frac{n}{n-1} \quad , \quad \text{cioè} \quad n' = 2n - 1 \quad .$$

Dunque la linea sulla quale si deve sviluppare una spirale sinusoidè, d'indice n , affinchè il polo descriva una retta, è una curva di Ribaucour d'indice $2n-1$. Bisogna tuttavia aver cura di disporre le due curve in modo che siano a convessità opposte solo per n compreso fra -1 e 0 , altrimenti si ha

$$\rho_0 = \frac{n}{n+1}\rho \quad , \quad \mathcal{R} = \frac{n+1}{2n+1}\rho_0 \quad , \quad \rho' = \frac{2n+1}{2n}r \quad ,$$

ed il polo descrive una linea di Ribaucour d'indice $\frac{2n-1}{2n+1}$.

f) Nello sviluppo d'una conica sopra una retta i fuochi generano curve importanti, alle quali si è dato il nome di *curve di Delaunay*. Si è visto altrove (III, 8) che le coordinate r e θ d'un fuoco soddisfano alle relazioni

$$r(2a-r) = a\rho_0 \text{sen} \theta \quad , \quad a\rho_0 \text{sen}^3 \theta = b^2 \quad . \quad (9)$$

In virtù della prima la formola (6) dà

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} - \frac{\rho_0 \operatorname{sen} \theta}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{2a-r}{ar} = \frac{1}{a} - \frac{1}{r}. \quad (10)$$

Intanto dall'equazione intrinseca delle coniche si ha

$$ds_0 = \frac{abd\rho_0}{3\sqrt{(a^2 - (ab\rho_0)^{\frac{2}{3}})((ab\rho_0)^{\frac{2}{3}} - b^2)}},$$

e ρ_0 si può esprimere in funzione di r eliminando θ fra le (9). Si trova $(ab\rho_0)^{\frac{2}{3}} = r(2a-r)$; poi la formola (5) dà

$$s' = \int \frac{abdr}{(2a-r)\sqrt{k^2a^2 - (r-a)^2}}, \quad (11)$$

chiamando k l'eccentricità. L'eliminazione di r fra (10) ed (11) conduce all'equazione

$$s' = \int \frac{abd\rho'}{(\rho' - 2a)\sqrt{k^2(\rho' - a)^2 - a^2}}, \quad (12)$$

dalla quale si trae, integrando, l'equazione intrinseca delle curve di Delaunay:

$$\rho' = a \frac{1 + k^2 - 2k \cos \frac{s'}{a}}{k \left(k - \cos \frac{s'}{a} \right)}. \quad (13)$$

Si hanno curve di due tipi ben distinti secondo che il numero positivo k è minore o maggiore di 1, cioè secondo che la conica generatrice è un'ellisse o un'iperbole. Le curve del primo tipo si chiamano anche *catenarie ellittiche*, quelle del secondo *catenarie iperboliche*. Il caso di $k=1$ (parabola) è stato già considerato nelle penultime applicazioni, e del resto la stessa (10) dà, per a infinito, $\rho' = -r$, proprietà caratteristica della catenaria. Dunque la catenaria propriamente detta si presenta come curva limite di separazione fra le catenarie ellittiche e le iperboliche. La più importante proprietà, che sarà utilizzata in seguito, è data dalla formola (10). Si noti che se, in questa formola, ρ' ed r vengono aumentati di a , si ottiene $r\rho' = a^2$, proprietà caratteristica di curve studiate (II, 7, m) precedentemente. Allo stesso risultato si perviene anche osservando che le parallele alla curva (12) sono rappresentate (II, 8) dall'equazione

$$s = \int \frac{ab\rho d\rho}{(\rho+c)(\rho+c-2a)\sqrt{k^2(\rho+c-a)^2 - a^2}},$$

che per $c=a$ diventa

$$\rho = \frac{a}{k} \sqrt{1 + (1-k^2) \operatorname{tg}^2 \frac{s}{a}}. \quad (14)$$

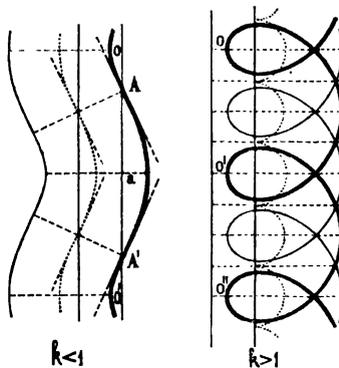
Inoltre per $c=2a$ si ricade sull'equazione (12), vale a dire che *ogni curva di Delaunay è parallela ad una curva eguale.*

g) Le curve di Delaunay si discutono assai facilmente (quando non si vo-

glia fare uso del loro stesso modo di generazione) avvalendosi delle formole (9), (10) e (13), dalle quali si trae

$$\cot\theta = \frac{k \operatorname{sen} \frac{s'}{a}}{1 - k \cos \frac{s'}{a}}, \quad y = a \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos \frac{s'}{a}}, \quad (15)$$

avvertendo che nella seconda formola il radicale va preso sempre positivamente. La tangente diventa parallela alla retta fissa quando si annulla $\cot\theta$, cioè per $s' = 0, \pm\pi a, \pm 2\pi a, \dots$. Ciò avviene dunque su due parallele alla retta stessa, fra le quali è compresa l'intera curva, giacchè la seconda formola (15) mostra che, per $\cos \frac{s'}{a} = \pm 1$, y raggiunge rispettivamente il minimo o il massimo valore: il valore massimo è $(1+k)a$, il minimo è $(1-k)a$ o $(k-1)a$ secondo che $k < 1$ o $k > 1$. Nella prima serie di punti la formola (13) dà per ρ' il valore estremo $a - \frac{a}{k}$, negativo o positivo, e nella seconda l'altro valore estremo $a + \frac{a}{k}$, sempre positivo. Si vede che solo per $k < 1$ la curvatura cambia segno, e ciò accade quando ρ' di-



venta infinito, cioè, in virtù di (13), per $\cos \frac{s'}{a} = k$. Dalle (15) si vede che $\cos\theta$ raggiunge allora il valore k , massimo, e che y prende il valore $a\sqrt{1-k^2}$. Dunque la curva s'infilette infinite volte alla distanza $a\sqrt{1-k^2}$ dalla retta fissa, e questa determina segmenti uguali ad a su tutte le normali inflessionali, come risulta anche dalla (10), che dà $r = a$ per $\rho' = \infty$. È poi chiaro che ogni normale inflessionale è tale anche per tutte le parallele alla curva, d'onde segue, in particolare, che i punti d'incontro delle predette normali con la retta fissa sono i punti d'inflessione di quella curva (14) che, come si è visto, è parallela alla curva considerata e ad un'altra curva eguale. Come le due curve siano parallele ed uguali è facile spiegarsi immaginando due ellissi uguali che si sviluppano sopra una retta mantenendosi simmetriche rispetto ad essa: un fuoco d'una ellisse ed il fuoco opposto dell'altra restano costantemente allineati col punto di contatto, in virtù di una nota proprietà (III, 8) delle ellissi, e generano così due curve di Delaunay, uguali e parallele. Ben diverso è l'aspetto delle nostre curve quando $k > 1$. Allora ρ' è sempre positivo, mentre, invece, $\cot\theta$ può crescere indefinitamente, cioè la curva non s'infilette mai, e la tangente può diventare perpendicolare alla retta fissa: ciò avviene per $\cos \frac{s'}{a} = \frac{1}{k}$, nel qual caso si ha $y = a\sqrt{k^2 - 1}$ dalla seconda formola (15). Dunque la parallela condotta alla retta fissa, alla distanza $a\sqrt{k^2 - 1}$, incontra ortogonalmente la curva in infiniti punti, ed è chiaro che sulla parallela stessa debbono cadere le infinite cuspidi di quella curva (14) che fa parte del sistema di linee parallele alla curva considerata.

4. Circolo d'inflessione. La formola (6) mostra che ρ' è infinito per

tutti i punti soddisfacenti all'eguaglianza $r = \mathcal{R} \sin \theta$: questa definisce una circonferenza, che si dice *d'inflessione*. Adunque *la circonferenza d'inflessione è il luogo dei punti che, in un dato istante, sono punti d'inflessione sulle loro traiettorie*. Se si porta sulla normale ad (M_0) il segmento $MH = \mathcal{R}$, il circolo d'inflessione è descritto sul diametro MH , e però, in virtù di (4), è simile, rispetto a C_0 , al circolo descritto sul diametro MC . È chiaro che *nel punto H concorrono, ad ogni istante, le tangenti inflessionali*. Si noti, in particolare, che *ogni punto mobile lungo una retta deve costantemente appartenere alla circonferenza d'inflessione*, e la retta percorsa dal punto deve costantemente passare per H. Inversamente, se nello sviluppo d'una curva sopra una base qualunque, un punto, rigidamente legato alla curva mobile, non cessa di trovarsi, ad ogni istante, sulla circonferenza d'inflessione, la sua traiettoria è rettilinea, giacchè l'equazione $\rho' = \infty$ definisce la retta. Quanto alle cuspidi delle infinite traiettorie, dalla (6) si vede che ρ' non può, in generale, annullarsi senza che si annulli r . È dunque sulla base che cadono le cuspidi delle rullette. Eccezionalmente se ne possono presentare in tutto il piano: ciò avviene quando \mathcal{R} è infinito, cioè per $\rho_0 = -\rho$. Allora si ha pure $\kappa = 0$, vale a dire che, *quando la curva mobile oscula la curva fissa*, i punti rigidamente legati alla prima restano per un istante come immobili, ed in essi le loro traiettorie subiscono un regresso. Invece, quando \mathcal{R} si annulla, cioè quando nel punto di contatto capita una cuspidi dell'una o dell'altra curva, si ha $\kappa = \infty$, $\rho' = r$ vale a dire che il punto di contatto sembra immobile rispetto a tutti i punti del piano, ed è centro di curvatura di tutte le loro traiettorie.

5. Teoremi di Steiner e di Habich. Per le rullette a base rettilinea le formole (5) e (6) diventano

$$s' = \int \frac{r}{\rho_0} ds_0, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} - \frac{\rho_0 \sin \theta}{r^2}.$$

D'altra parte i valori di s e di ρ , relativi alla pedale di (M_0) rispetto al punto P, son dati (II, 7, l) dalle formole

$$s'' = \int \frac{r}{\rho_0} ds_0, \quad \frac{1}{\rho''} = \frac{2}{r} - \frac{\rho_0 \sin \theta}{r^2}.$$

Dunque

$$s'' = s', \quad \frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r}.$$

Nella prima eguaglianza sta il teorema di Steiner: *ogni arco di rulletta a base rettilinea è uguale al corrispondente arco della pedale della curva mobile rispetto al punto generatore*. La seconda eguaglianza conduce al teorema di Habich. Se vi si cambia il segno di ρ' , per conformarsi alle convenzioni fatte nel § 1, si riconosce che, nello sviluppo della pedale di (M_0) rispetto a P, su (P), il diametro del circolo d'inflessione è appunto r .

Intanto le coordinate di P rispetto alla pedale sono $r'' = y, \theta'' = \theta$, e soddisfano all'eguaglianza $r'' = r \text{ sen } \theta''$, vale a dire che il punto P appartiene costantemente alla circonferenza d'inflessione. Dunque, *se nello sviluppo d'una curva sopra una retta, un punto P, fisso nel piano della curva, descrive la rulletta (P), la pedale della prima curva rispetto a P, sviluppandosi su (P), farà descrivere a P una retta.*

6. Esempii: a) Se la curva (M_0) è una spirale sinusoidale d'indice n' , si sa (§ 3, d) che la rulletta (P) descritta dal polo è una curva di Ribaucour d'indice $\frac{n'-1}{n'+1}$, e d'altra parte è noto (III, 21, a) che la pedale di (M_0) rispetto a P è un'altra spirale d'indice $\frac{n'}{n'+1}$. Si viene così a dimostrare per altra via (cfr. 3, e) che, se una spirale sinusoidale d'indice $\frac{n'}{n'+1} = n$ si sviluppa sopra una curva di Ribaucour d'indice $\frac{n'-1}{n'+1} = 2n-1$, il polo della spirale descrive una retta.

b) Se (M_0) è una conica, la rulletta (P) generata da un fuoco è una curva di Delaunay, e si sa (III, 8) che la pedale della conica rispetto a P è la circonferenza descritta sull'asse focale come diametro. Si noti che, inversamente, ogni circolo, comunque si fissi nel suo piano il punto P, è pedale d'una ben determinata conica, che ha un fuoco in P. Adunque *la linea sulla quale bisogna sviluppare un circolo, affinché un punto dato nel suo piano percorra una retta, è una curva di Delaunay.*

7. Quando P non è fisso nel piano di (M_0), bisogna prima di tutto conoscere la traiettoria che va descrivendo nel piano stesso, e la posizione che vi occupa ad ogni istante. All'uopo basta darsi il raggio di curvatura ρ'' della traiettoria ed il rapporto α_0 del suo arco elementare a quello di (M_0), le quali quantità si debbono per conseguenza considerare come funzioni note di s_0 . Vogliamo limitarci a studiare il caso più semplice d'una traiettoria costantemente ortogonale ai raggi PM, condizione questa che deve apportare un vincolo fra α_0 e ρ'' . Per abbreviare alquanto i calcoli consideriamo le posizioni M' e P' di M e P, nel piano fisso, dopo uno sviluppo infinitesimo di (M_0) su (M), diguisachè $MM' = ds, PP' = \alpha ds$. Le rette PM e P'M' concorrono nel centro di curvatura C' della traiettoria di P nel piano fisso, ed è chiaro che si ha

$$\frac{PP'}{PC'} = \frac{MM'}{MC'} \text{ sen } \theta, \quad \text{cioè} \quad \frac{\alpha}{\rho'} = \frac{\text{sen } \theta}{\rho' - r}.$$

Il ragionamento vale anche nel caso che lo spostamento di P si consideri nel piano mobile, e però

$$\alpha = \frac{\rho' \text{ sen } \theta}{\rho' - r}, \quad \alpha_0 = \frac{\rho'' \text{ sen } \theta}{\rho'' - r}. \quad (16)$$

Ciò premesso, siccome le variazioni delle coordinate di P nel piano mobile sono i prodotti dell'arco elementare $\alpha_0 ds_0$, per $\text{sen } \theta$ e $-\text{cos } \theta$, si ha

$$\frac{\delta x}{ds_0} = \alpha_0 \frac{y}{r}, \quad \frac{\delta y}{ds_0} = -\alpha_0 \frac{x}{r};$$

poi, portando questi valori nelle formole fondamentali, relative alla curva mobile, se ne ricava

$$\frac{dx}{ds_0} = \left(\frac{x_0}{r} + \frac{1}{\rho_0} \right) y - 1 \quad , \quad \frac{dy}{ds_0} = - \left(\frac{x_0}{r} + \frac{1}{\rho_0} \right) x ;$$

quindi le formole relative alla curva fissa diventano

$$\frac{\delta x}{ds} = \left(\frac{x_0}{r} + \frac{1}{\mathcal{R}} \right) y \quad , \quad \frac{\delta y}{ds} = - \left(\frac{x_0}{r} + \frac{1}{\mathcal{R}} \right) x .$$

Dunque, anche nel caso attuale, la normale alla rulletta passa nel punto istantaneo di contatto, cioè *le due traiettorie di P sono fra loro tangenti*. Si vede inoltre dalle ultime formole che il rapporto dell'arco elementare della rulletta a quello della base è

$$x = x_0 + \frac{r}{\mathcal{R}} . \quad (17)$$

Data la funzione x_0 , la formola (17) farà conoscere l'arco della rulletta, e la prima delle (16) permetterà poi di calcolarne la curvatura.

8. Formola di Savary. Se in (17) si pongono per x e x_0 i valori (16), si ottiene

$$\frac{1}{\rho' - r} - \frac{1}{\rho'' - r} = \frac{1}{\mathcal{R} \sin \theta} . \quad (18)$$

È questa l'importante formola di Savary, che per $\rho'' = 0$ si riduce alla (6), e si può sempre sostituire alla prima formola (16) per la determinazione di ρ' , giacchè, data x_0 , la funzione ρ'' è anche nota mediante la seconda formola (16). Geometricamente interpretata, la formola di Savary permette di costruire il centro di curvatura C' della rulletta, supponendo conosciuto il centro di curvatura C'' della traiettoria del punto generatore nel piano mobile. Essa ci dice infatti che *le perpendicolari a PM ed alla tangente a (M), in M, condotte rispettivamente per M e per C', concorrono su HC''*. Si può fare a meno di H osservando che *le rette CC' e C₀C'' concorrono sulla perpendicolare a PM, condotta per M*. Si ritrova così, per C'' coincidente con P, la costruzione segnalata nel § 2.

9. Inviluppi. Quando (M_0) si sviluppa su (M) , ogni linea fissa nel piano di (M_0) involuppa (II, 5) una certa linea (P) . Ciascun punto P si può riguardare come punto comune a due posizioni infinitamente vicine della linea considerata, cioè come fisso nel piano della curva (M_0) , mentre questa si sviluppa infinitamente poco su (M) . Dunque (§ 1) la normale all'involuppo, traiettoria di P nel piano fisso, passa per M, cioè *la linea considerata tocca il suo involuppo al piede delle perpendicolari che le si abbassano da M*. Intanto si viene così a realizzare l'ipotesi del § 7, cioè il punto P si muove ortogonalmente a PM anche nel piano di (M_0) . Dunque, trovate le coordinate r e θ di P, proiezione ortogonale dell'origine M sulla linea che si considera, basterà sostitui-

tuirle nelle formole (16) e (17) per giungere in ogni caso all'*equazione intrinseca dell'inviluppo*. Si applichi finalmente la formola di Savary a quel punto C'' , rigidamente legato ad (M_0) , che in un dato istante coincide col centro di curvatura della linea mobile, nel punto in cui questa tocca il suo inviluppo. Se ρ''' è il raggio di curvatura della traiettoria di C'' , bisognerà porre ρ''' e 0 al posto di ρ' e ρ'' in (18), ed $r - \rho''$ invece di r . Con ciò si riesce solo a cambiare ρ' in $\rho'' + \rho'''$. Dunque $\rho' = \rho'' + \rho'''$, cioè il centro di curvatura della traiettoria del punto considerato *coincide col centro di curvatura dell'inviluppo della linea mobile*.

10. Per applicare alla retta le formole precedenti si deve supporre $\rho' = \infty$. In questa ipotesi la seconda formola (16) dà $\alpha_0 = \text{sen } \theta$; poi la (17) fa conoscere α , e dalla (18) si ricava ρ' . Si ottiene così

$$s' = \int \left(\text{sen } \theta + \frac{r}{R} \right) ds, \quad \rho' = r + R \text{sen } \theta, \quad (19)$$

dove r e θ sono le coordinate della proiezione P di M sulla retta considerata. Siccome questa è data, nel piano di (M_0) , r e θ si potranno esprimere in funzione di s_0 o di s ; poi dall'eliminazione di s fra le (19) risulterà l'equazione intrinseca della rulletta (P).

11. **Applicazione.** Se una curva di Ribaucour d'indice n si sviluppa sopra una retta, la sua direttrice, che stacca dalla normale un segmento $\frac{1}{2}(n+1)\rho_0$ a partire da M, tocca il suo inviluppo nel piede P della perpendicolare che le si abbassa da M, e però si ha $r = \frac{1}{2}(n+1)\rho_0 \text{sen } \theta$. Portando questo valore nella seconda formola (19), in cui è $R = \rho_0$, si trova

$$\rho' = \frac{n+3}{n+1} r = \frac{2r}{n'+1}, \quad \text{dove } n' = \frac{n-1}{n+3},$$

e si perviene così al seguente teorema di Dubois: *quando una curva di Ribaucour, d'indice n , si sviluppa sopra una retta, la sua direttrice inviluppa una curva di Ribaucour d'indice $\frac{n-1}{n+3}$* . Per esempio, se si fa $n = 1, 0, -2$, ecc., si trova che, quando un circolo si sviluppa sopra una retta, ogni suo diametro inviluppa una cicloide; la direttrice d'una cicloide, che si sviluppa sopra una retta, si mantiene parallela alle tangenti di un'asteroide; la direttrice d'una parabola, che si sviluppa sopra una retta, si mantiene tangente ad una catenaria; ecc.

12. **Circolo di regresso.** La seconda formola (19) mostra che si ha $\rho' = 0$ quando $r = -R \text{sen } \theta$, cioè quando P appartiene alla circonferenza simmetrica della circonferenza d'inflessione (§ 4) rispetto alla tangente ad (M), in M. Tale circonferenza si dice *di regresso*, perchè è il luogo delle cuspidi che si presentano, in un dato istante, sulle rullette generate (tangenzialmente) dalle rette del piano di (M_0) . Si noti che nel punto H' , simmetrico di H rispetto ad M, *concorrono tutte le tangenti cuspidali*. Ne segue che se una retta, fissa nel piano di (M_0) , passa costantemente per H' , essa *contiene un*

punto fisso del piano di (M), punto comune a tutte le circonferenze di regresso. Infatti, il secondo punto d'incontro P della retta con la circonferenza di regresso è anche il punto di contatto della retta col suo involuppo, e poichè in P si ha costantemente $\rho' = 0$, vuol dire che l'involuppo si riduce all'unico punto P. È poi utile osservare che nello sviluppo inverso di (M) su (M_0) i circoli di regresso e d'inflessione si scambiano fra loro. Ora, *se nello sviluppo di (M_0) su (M) un punto P, fisso nel piano di (M_0) , descrive una retta*, siccome questa deve (§ 4) passare per H, che nello sviluppo inverso prende il posto di H', è chiaro che *nello sviluppo di (M) su (M_0) la retta considerata ruoterà intorno a P.*

13. Esempii: a) Si è visto (§ 3, e) che se una spirale sinusoidale, d'indice n' , si sviluppa sopra una curva di Ribaucour, d'indice $n = 2n' - 1$, il polo della spirale si sposta lungo la direttrice della base. Ne segue subito, che *se una curva di Ribaucour, d'indice n, si sviluppa sopra una spirale sinusoidale, d'indice $\frac{1}{2}(n+1)$, la sua direttrice ruota intorno al polo della spirale.* Per esempio, se una retta si sviluppa sopra una catenaria, un punto del suo piano si muove in linea retta, e nello sviluppo inverso la direttrice della catenaria passa per un punto fisso; se una cardioide si sviluppa sopra una cicloide convenientemente scelta, la sua cuspidale percorre la direttrice della cicloide, e nello sviluppo inverso questa retta non cessa di passare per la cuspidale della cardioide; la curva su cui si deve sviluppare la seconda pedale d'un circolo rispetto ad un punto del suo piano, affinchè questo punto descriva una retta, è parallela ad un'asteroide, e nello sviluppo inverso la retta ruoterà intorno al punto.

b) Più generalmente, utilizzando il teorema (§ 5) di Habich, possiamo affermare che *la linea su cui si deve sviluppare una curva, generata da un punto P nello sviluppo di un'altra curva sopra una retta, affinchè questa retta involuppi un punto, è la pedale della seconda curva rispetto a P.* Così, per esempio, supponendo che la seconda curva sia una conica, con un fuoco in P, si trova (cfr. 6, b) che, *se una curva di Delaunay si sviluppa sopra un circolo convenientemente scelto, la sua base ruota intorno ad un punto fisso.*

14. Segnaliamo, per finire, l'utilità che ha per noi, in queste lezioni, la teoria delle rullette, in quanto ci fornisce modi di generazione di talune curve, che fin qui ci erano note solo per la loro equazione intrinseca. Per esempio, noi possiamo ora renderci conto più esattamente della forma delle curve di Ribaucour, definite dagli indici 3 e -5, e notate precedentemente (III, 17) per la rassomiglianza delle loro equazioni intrinseche

$$s = 2 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^4 - 1}}, \quad s = \frac{2}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}},$$

con quelle della lemniscata e dell'iperbole equilatera. Ora possiamo dire che la prima curva è il luogo del centro di un'iperbole equilatera, che si sviluppa sopra una retta, o l'involuppo della direttrice di una catenaria che si

sviluppa (esternamente) sopra una catenaria eguale; ed è anche la curva sulla quale deve una lemniscata svilupparsi affinché il suo centro percorra una retta. Similmente la seconda equazione rappresenta la curva sulla quale si deve sviluppare un'iperbole equilatera perchè il suo centro descriva una retta. Inversamente, quando le due curve si sviluppano rispettivamente sopra una lemniscata ed un'iperbole equilatera, le loro direttrici ruotano intorno a punti fissi.

VI. I BARICENTRI.

1. Ai punti M_i ($i=1, 2, 3, \dots$) definiti in un piano dalle coordinate x_i, y_i , relative ad una coppia qualunque di assi, si attribuiscono coefficienti μ_i , che si chiameranno *masse*, e si consideri il punto G, definito dalle coordinate

$$x = \frac{\sum \mu_i x_i}{\sum \mu_i}, \quad y = \frac{\sum \mu_i y_i}{\sum \mu_i}, \quad (1)$$

È chiaro che ogni trasformazione lineare, eseguita sulle coordinate dei punti M_i , si ripete identicamente sulle coordinate x, y , e ciò basta per mettere in evidenza l'*unicità* del punto (1), cioè per provare che questo è sempre lo stesso, comunque si scelgano gli assi. Il punto G si chiama *baricentro* del dato sistema di punti o di masse. In particolare si noti che il baricentro del sistema di due masse μ_1 e μ_2 , deposte nei punti M_1 ed M_2 , è quel punto che divide $M_1 M_2$ nel rapporto inverso di μ_1 a μ_2 . Il baricentro del sistema costituito da più sistemi di punti è anche il baricentro del sistema dei baricentri, purchè in ciascuno di questi s'intenda deposta una massa uguale alla somma delle masse del corrispondente sistema. Queste ed altre proprietà son facili a dedurre dalle (1). Noi vogliamo più specialmente considerare il caso di masse distribuite con continuità lungo una curva, e chiameremo μds la massa infinitesima deposta sull'arco elementare ds : basterà conoscere la funzione μ di s , che si chiama *densità*, affinchè sia nota la legge di distribuzione delle masse, e perchè sia ben determinato il baricentro di qualunque arco. Le coordinate di tale baricentro saranno date dalle formole

$$x \int \mu ds = \int \mu u ds, \quad y \int \mu ds = \int \mu v ds, \quad (2)$$

supponendo estese le integrazioni da un estremo all'altro dell'arco che si vuol considerare, e rappresentando con u e v le coordinate dei punti della curva. Si fa l'ipotesi più semplice quando la densità si suppone costante; si ottiene allora il *baricentro* propriamente detto, del quale s'intenderà sempre parlare, in seguito, quando non si farà esplicitamente altra ipotesi. Se

invece la densità si prende uguale (o proporzionale) alla curvatura della linea, si ottiene il punto chiamato *baricentro di curvatura* da Steiner.

2. Per la determinazione della doppia infinità dei baricentri di tutti gli archi d'una curva basta la conoscenza dei baricentri degli archi che hanno un dato estremo O (in cui si potrà sempre porre l'origine degli archi), giacchè il baricentro di qualunque arco M_1M_2 , definito dai valori s_1 ed s_2 di s negli estremi, divide nel rapporto $-s_2:s_1$ il segmento rettilineo che va dal baricentro di OM_1 a quello di OM_2 . Sia dunque G il baricentro d'un arco OM, e siano x, y le sue coordinate rispetto alla tangente ed alla normale nell'estremo mobile M. Nel caso attuale le (2) si riducono alla forma

$$sx = \int_0^s u ds, \quad sy = \int_0^s v ds,$$

dove ciascuna coppia di valori u, v soddisfa alle condizioni d'immobilità (II, 1), tranne quella ($u=0, v=0$) che si riferisce al limite superiore degli integrali. Ne segue, in primo luogo, rappresentando semplicemente con ρ il valore di ρ in M,

$$\frac{d}{ds} \int_0^s u ds = \frac{1}{\rho} \int_0^s v ds - \int_0^s ds, \quad \frac{d}{ds} \int_0^s v ds = -\frac{1}{\rho} \int_0^s u ds,$$

cioè

$$\frac{dsx}{ds} = \frac{sy}{\rho} - s, \quad \frac{dsy}{ds} = -\frac{sx}{\rho}. \quad (3)$$

Le coordinate di G sono determinate da queste equazioni e dalla condizione di annullarsi con s , giacchè, ridotto l'arco all'unico punto O, il baricentro è O. Le stesse (3) fanno poi conoscere con maggior precisione il modo di tendere di G ad O, perchè, se ρ non è nullo nell'origine (arbitraria) degli archi, si ha, in virtù del teorema di l'Hospital,

$$\lim \frac{x}{s} = \lim \frac{sx}{s^2} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{y}{\rho} - 1 \right) = -\frac{1}{2}, \quad \lim \frac{y}{s^2} = \lim \frac{sy}{s^3} = -\frac{1}{3} \lim \frac{x}{s\rho} = \frac{1}{6\rho}$$

e si vede che, nel dominio di O, l'equazione $x^2 + y^2 = \frac{2}{3} \rho y$ tende ad essere soddisfatta, cioè *il baricentro tende a collocarsi sulla circonferenza che si ottiene riducendo ai tre quarti, intorno ad O, la circonferenza osculatrice.*

3. Molto utile è la conoscenza della linea *baricentrica*, cioè della curva descritta dal punto G quando M si sposta lungo la curva data. Evidentemente una curva ha infinite baricentriche, ciascuna delle quali prende origine in un punto arbitrario della curva stessa; ed è chiaro, per le osservazioni testè fatte, non solo che ogni baricentrica tocca la curva nella corrispondente origine, ma, ancora, che la sua curvatura è nel punto di contatto uguale ai quattro terzi di quella della curva data. Adunque ogni curva appartiene all'inviluppo delle sue baricentriche, come si vede anche più chia-

ramente osservando che due baricentriche qualunque s'incontrano nel baricentro dell'arco determinato dalle loro origini sulla curva data, il quale baricentro tende a collocarsi sulla curva quando le due origini tendono a confondersi. Se la curva è chiusa, due baricentriche hanno infiniti punti comuni, baricentri degli infiniti archi determinati dalle origini sulla curva, e siccome la differenza o la somma di due siffatti archi è sempre un multiplo della lunghezza dell'intera curva, si può aggiungere che l'incontro delle due baricentriche avviene sopra una retta, che passa nel punto Q, baricentro dell'intera curva chiusa, e punto comune a tutte le baricentriche.

4. Ora prendiamo a considerare, più generalmente, la curva descritta da qualunque punto Γ , le cui coordinate soddisfano alle (3). Le formole fondamentali danno subito, in virtù delle (3),

$$\frac{\delta x}{\delta s} = -\frac{x}{s}, \quad \frac{\delta y}{\delta s} = -\frac{y}{s},$$

e però la tangente a (Γ) , in Γ , passa per M, cioè *il punto Γ insegue costantemente M*, ed il rapporto degli archi elementari delle due curve è $x=r:s$. Le coordinate r e θ di Γ soddisfano all'unica condizione d'immobilità

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\text{sen}\theta}{r},$$

come risulta subito dall'osservare che la retta $M\Gamma$ tocca in Γ il suo involuppo, e come, del resto, si può facilmente dedurre dalle (3). Dunque (II, 4) si ha, per calcolare la curvatura di (Γ) ,

$$\frac{x}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{ds} = \frac{\text{sen}\theta}{r};$$

e però l'equazione intrinseca di (Γ) risulta dall'eliminazione di s fra le uguaglianze

$$s' = \int \frac{r}{s} ds, \quad \rho' = \frac{r^2}{s \text{sen}\theta}.$$

La seconda formola dà il modo di costruire il centro di curvatura di (Γ) . Si porti sulla tangente ad (M), nel verso negativo, il segmento $MD=s$, e si proietti D, in H, sulla normale a (Γ) : *il centro di curvatura di (Γ) appartiene alla perpendicolare elevata per M ad MH*. Di queste proprietà gode, in particolare, ogni baricentrica (G), caratterizzata, fra tutte le (Γ) , dal fatto del suo passaggio per O, dove tocca (M) ed ha la curvatura

$$\frac{1}{\rho'} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \text{sen}\theta}{r^2} = \lim \left(\frac{s}{r} \right)^3 \lim \frac{y}{s^2} = \frac{4}{3\rho}.$$

Lasciandosi guidare dalla prima proprietà è facile rendersi conto della forma generale delle baricentriche di qualunque curva chiusa. Nel punto Q, baricentro dell'intera curva, la baricentrica che prende origine in O passa in-

finite volte, tangenzialmente ad OQ , e la sua curvatura, col subire un aumento costante ad ogni nuovo passaggio, finisce per oltrepassare ogni limite. La baricentrica si va dunque restringendo indefinitamente nel dominio di Q , suo punto assintotico, dal quale nondimeno esce una retta, OQ , che non incontra la curva infinite volte. Le tangenti alla baricentrica, negli infiniti punti d'incontro con ogni altra retta uscente da Q , concorrono in un punto, e quando la retta gira intorno a Q , il punto descrive la curva chiusa che ammette la data baricentrica.

5. Per la determinazione dei baricentri non è indispensabile la curva (G): basta conoscere una qualunque curva (Γ). Siano infatti ξ ed η le coordinate di Γ , e si ponga

$$x = \xi + R \cos \theta \quad , \quad y = \eta + R \sin \theta \quad .$$

Applicando le (3) ai punti Γ e G si ottiene

$$\frac{d}{ds}(sR \cos \theta) = \frac{sR}{\rho} \sin \theta \quad , \quad \frac{d}{ds}(sR \sin \theta) = -\frac{sR}{\rho} \cos \theta \quad ;$$

quindi

$$\frac{dsR}{ds} = 0 \quad , \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} \quad .$$

Dalla prima eguaglianza si vede che sR dev'essere costante, la seconda ci dice che la direzione ΓG è invariabile. Dunque, se si conosce una curva (Γ), è sufficiente un sol baricentro G_0 per determinare l'intera baricentrica (G). Infatti, se Γ_0 è il punto che corrisponde a G_0 sulla curva (Γ), basta condurre per ogni punto Γ , parallelamente a $\Gamma_0 G_0$, un segmento la cui lunghezza stia a quella di $\Gamma_0 G_0$ nel rapporto inverso di s ad s_0 . L'estremo di tale segmento è appunto G . In particolare si può prendere per G_0 la stessa origine O , senonchè allora Γ_0 sta all'infinito, cioè (Γ) ha un assintoto, la cui direzione è quella appunto di tutti i segmenti ΓG ; ma della grandezza di questi segmenti si sa soltanto che varia, da un punto all'altro, in ragione inversa di s , e per determinarla bisognerà ricordare che, mentre per M tendente ad O crescono indefinitamente le distanze di M e di G a Γ , deve invece MG tendere a zero.

6. Applicazioni: *a*) Nel caso d'un *circolo* ($\rho = a, s = a\varphi$) le (3), messe sotto la forma

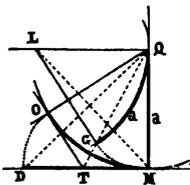
$$\frac{dx\varphi}{d\varphi} = (y - a)\varphi \quad , \quad \frac{dy\varphi}{d\varphi} = -x\varphi \quad ,$$

lasciano subito scorgere la soluzione $y = a, x\varphi = -a$. Sebbene con un'integrazione facile si riesca a trovare che le coordinate di G sono

$$x = -\frac{a}{\varphi} (1 - \cos \varphi) \quad , \quad y = a \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) \quad ,$$

a noi, dopo le osservazioni del § 5, basta la conoscenza del punto Γ , definito dalle

coordinate $x = -\frac{a}{\varphi}, y = a$, per poter determinare anche G. Si sviluppi l'arco OM sulla tangente in M, e sia D il punto in cui viene O. Il punto Γ sta all'intersezione delle perpendicolari condotte per M e per Q ai raggi QD e QM. Quando φ tende a zero, il valore assoluto di x cresce all'infinito, e però $M\Gamma$ tende a toccare il circolo. Dunque *il baricentro dell'arco OM appartiene alla perpendicolare abbassata da Γ su OQ*. Ciò basta per costruire G, che per ragione di simmetria deve trovarsi anche sulla bisettrice dell'angolo OQM. Del resto è facile determinare la lunghezza di ΓG , osservando che deve variare in ragione inversa di φ e che, d'altra parte, essa tende a comportarsi come quella di ΓM , che a sua volta si comporta come $a:\varphi$ nel dominio di O. Dunque $\Gamma G = a:\varphi = \Gamma Q$, vale a dire che *il baricentro appartiene anche alla circonferenza descritta dal centro Γ tangenzialmente al raggio QM*. Si noti che su questa circonferenza l'arco QG ha la lunghezza costante a . Ne segue che, se una verga inestendibile QM, infinitamente sottile, e fissata nel dominio di Q, si flette in forma circolare, la sua estremità mobile descrive quella baricentrica del circolo di centro Q, che prende origine in M. Finalmente, considerando i triangoli simili MOD, QGM, con lati omologhi perpendicolari, si vede che anche il lato OD è perpendicolare a GM, e si è in tal modo condotti ad un'assai più semplice costruzione del baricentro: *G appartiene alla perpendicolare abbassata da M su OD*.



b) Cerchiamo se si può soddisfare alle (3) prendendo x ed y proporzionali ad s , nella quale ipotesi queste coordinate definiranno certamente il baricentro, perchè si annullano con s . Posto $x = \alpha s, y = \beta s$, le (3) danno

$$\frac{\rho}{s} = \frac{\beta}{2\alpha + 1} = -\frac{\alpha}{2\beta},$$

e però la curva è una *spirale logaritmica*. Inversamente, data una simile curva mediante l'equazione $\rho = ks$, possiamo sempre ricavare α e β in funzione di k , dalle precedenti equazioni, sicuri che le (3) saranno soddisfatte per $x = \alpha s, y = \beta s$: ma tale determinazione non è necessaria, perchè basta dare alle dette equazioni la forma

$$\frac{\rho}{s} = \frac{y}{2x + s} = -\frac{x}{2y},$$

per riconoscere che il baricentro dell'arco OM appartiene alle rette

$$sx + 2\rho y = 0, \quad 2\rho x - s(y - \rho) = 0.$$

Intanto è noto (I, 11, c) che la perpendicolare elevata ad OM da O, polo della spirale, incontra in C, centro di curvatura, la normale, ed in D, alla distanza s da M, la tangente. Ora l'interpretazione geometrica delle ultime equazioni mostra che G è la *proiezione di M sulla retta che congiunge C al punto medio di MD*. Qui si osservi che G appartiene, come O, alla circonferenza descritta sul diametro MC.

c) Per $x = 0$ le (3) diventano $y = \rho, \frac{dsy}{ds} = 0$; quindi $s\rho = a^2$. Per conseguenza nel caso della *clotoide* il centro di curvatura è un punto Γ , vale a dire che la baricentrica relativa al punto d'inflessione si può dedurre dalla sviluppata stessa della curva mercè le osservazioni del § 5. Siccome $M\Gamma$ tende a diventare la normale

in O, punto d'inflessione, quando M tende ad O, il baricentro dell'arco OM appartiene alla perpendicolare abbassata dal centro di curvatura, in M, sulla tangente inflessionale. Inoltre ΓG varia in ragione inversa di s , cioè proporzionalmente a ρ , e siccome MG tende a comportarsi come $\Gamma M - \Gamma G$ nel dominio di O, si ha necessariamente $\Gamma G = \rho$, altrimenti MG oltrepasserebbe ogni limite invece di tendere a zero. Dunque il baricentro dell'arco OM appartiene anche alla circonferenza osculatrice nell'estremo M. Ciò premesso, si sa (§ 2) che il baricentro d'un arco qualunque $M_1 M_2$ divide nel rapporto $-s_2 : s_1 = -\rho_1 : \rho_2$ il segmento rettilineo che va dal baricentro di OM_1 a quello di OM_2 , e poichè questi baricentri sono gli estremi di due raggi paralleli nei circoli che osculano la curva in M_1 ed M_2 , si vede che ogni arco di clotoide ha il baricentro in un centro di similitudine dei circoli osculatori estremi. È poi facile dimostrare che la clotoide è l'unica curva che abbia in linea retta il baricentro di qualunque suo arco ed i centri di curvatura negli estremi dell'arco stesso.

d) Vogliamo cercare tutte le curve, per le quali il baricentro d'un arco OM appartiene alla circonferenza osculatrice in M, ridotta o amplificata, intorno ad M, secondo una proporzione costante. Bisogna, in altri termini, che si possano trovare funzioni w ed y di s , nulle per $s=0$, e soddisfacenti alle (3) ed all'equazione

$$w^2 + y^2 = (n+1)\rho y. \quad (4)$$

Se, dopo aver moltiplicato i due membri per s^2 , si deriva rispetto ad s , osservando le (3), si ottiene

$$(n-1)sw = (n+1)y \frac{ds\rho}{ds}; \quad (5)$$

poi, scritta questa eguaglianza sotto la forma

$$\frac{n-1}{sy} \frac{dsy}{ds} + \frac{n+1}{sp} \frac{dsp}{ds} = 0,$$

se ne ricava, integrando,

$$(sy)^{n-1} (sp)^{n+1} = a^{4n}, \quad (6)$$

purchè $n \leq 0$. Per $n=1$ si trova, così, la clotoide, sulla quale non vogliamo qui ritornare. L'eliminazione di sp fra (4) e (6) dà

$$(sx)^2 + (sy)^2 = (n+1)a^{\frac{4n}{n+1}} (sy)^{\frac{2}{n+1}}, \quad (7)$$

e poichè sx ed sy sono infinitesimi con s , non può non essere $n+1 > 0$. Si deve anzi avere $\frac{2}{n+1} \leq 2$, cioè $n \geq 0$, se non si vuole che, trascurando infinitesimi superiori, nel dominio di O abbia luogo l'eguaglianza assurda $x^2 + y^2 = 0$ per valori reali, non nulli, di x e di y . Ciò premesso, si ponga, per brevità,

$$sp = a^2 t, \quad \tau = \sqrt{(n+1)t^{\frac{2n}{n-1}} - 1}.$$

Le formole (6) e (7) danno

$$sy = a^2 t^{-\frac{n+1}{n-1}}, \quad sx = \pm \tau a^2 t^{-\frac{n+1}{n-1}}, \quad (8)$$

e la prima di queste uguaglianze mostra che, per s tendente a zero, t tende a zero

o cresce indefinitamente secondo che $n < 1$ o $n > 1$. Finalmente, sostituendo in (5) i valori (8), ed integrando, si ottiene, nell'uno o nell'altro caso,

$$s^2 = -2 \frac{n+1}{n-1} a^2 \int_0^t \frac{dt}{\tau} \quad \text{o} \quad s^2 = 2 \frac{n+1}{n-1} a^2 \int_t^\infty \frac{dt}{\tau}. \quad (9)$$

Basterebbe eliminare t fra $s\rho = a^2 t$ e l'una o l'altra equazione (9) per trovare l'equazione intrinseca delle nostre curve. Se poi si vuole esaminare il contegno di tali curve nel dominio dell'origine, si osservi che, quando s tende a zero, τ cresce all'in-

finito come $t^{\frac{n}{n-1}}$, d'onde segue che gli integrali (9) si comportano come $t^{-\frac{1}{n-1}}$, cioè, in virtù delle stesse (9), t tende a zero o cresce indefinitamente, nei rispettivi casi ($n < 1, n > 1$), come s^{2-2n} . Dunque la curva si svolge nel dominio di O come se la sua equazione intrinseca fosse $\rho = ks^{1-2n}$, vale a dire che acquista, in quel punto, un minore o un maggior contatto con la tangente, secondo che $n < \frac{1}{2}$ o $n > \frac{1}{2}$.

Per precisare meglio la sua forma bisognerebbe richiamare osservazioni precedenti (I, 11, e), e si riconoscerebbe allora che in ogni caso comparisce di preferenza, in O, il punto d'inflessione. Il punto assintotico è possibile solo nel caso di $n=0$, che verrà esaminato in ultimo, fra breve; e l'osservazione finale del § 2 permette di asserire che solo per $n = \frac{1}{2}$ la curvatura può, nell'origine, avere un valore finito e diverso da zero. Ed effettivamente, in questo caso, la prima delle (9) dà

$$s^2 = 6a^2 \int_0^t \frac{t dt}{\sqrt{\frac{3}{2} - t^2}} = 6a^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2} - t^2} - \sqrt{\frac{3}{2} - t^2} \right),$$

d'onde si trae $s^2 + 36\rho^2 = \text{costante}$, equazione (I, 8, c) d'una *epicicloide bicuspidata stellata*. Finalmente, se si vuol sapere per quali curve è possibile che sia $n=0$, basterà sostituire al secondo membro di (6), che per $n=0$ cessa di essere arbitrario, una costante qualunque, la quale si potrà, per comodità dei calcoli, designare con $1 + 4k^2$. Così le formole (4) e (6) daranno

$$x = -\frac{2k\rho}{1+4k^2}, \quad y = \frac{\rho}{1+4k^2};$$

poi dalla (5) si avrà, integrando,

$$\rho = ks + \frac{k'}{s}.$$

Fra queste curve è pur la clotoide ($k=0$), che non può rispondere alla questione, perchè per essa è $n=1$; ma si noti che x ed y debbono annullarsi con s , per la qual cosa occorre e basta che si annulli ρ , cioè che si abbia $k'=0$. Dunque la proprietà osservata in fine della penultima applicazione caratterizza le spirali logaritmiche.

7. *La ricerca dei baricentri d'una curva è sempre riducibile a quella di punti fissi nel piano di un'altra curva.* Infatti, se si pone

$$sx = ax_0, \quad sy = ay_0, \quad (10)$$

ed inoltre

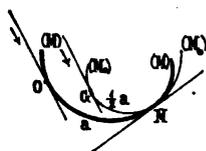
$$s^2 = 2as_0, \quad s\rho = a\rho_0, \quad (11)$$

le (3) diventano le note condizioni

$$\frac{dx_0}{ds_0} = \frac{y_0}{\rho_0} - 1, \quad \frac{dy_0}{ds_0} = -\frac{x_0}{\rho_0}, \quad (12)$$

che assicurano l'immobilità del punto (x_0, y_0) nel piano d'una curva (M_0) , la cui equazione intrinseca risulta dall'eliminazione di s fra le (11). Intanto queste (11) stabiliscono una corrispondenza fra i punti di (M) e quelli di (M_0) , mentre le (10) pongono in relazione una soluzione (x, y) delle (3) con una (x_0, y_0) delle (12), e però fanno corrispondere ad ogni curva (Γ) un certo punto del piano di (M_0) . In particolare, alla baricentrica che prende origine in O corrisponde l'origine degli archi di (M_0) , giacchè, per le (10), con s (ed s_0) si annullano x_0 ed y_0 , se x ed y restano finiti: ciò (§ 5) accade, nell'origine, solo per la baricentrica.

8. Costruzione geometrica dei baricentri. L'arbitrarietà di a permette di dedurre una costruzione generale dei baricentri dalle formole (10) ed (11). Dato a cercare il baricentro dell'arco OM , si prenda a uguale appunto alla lunghezza di OM , e si determini, mercè le (11), la curva (M_0) .



In virtù delle (10), se le due curve si toccano nei punti corrispondenti M ed M_0 , il baricentro di OM e l'origine di (M_0) coincidono, e la prima delle (11) ci dà $s_0 = \frac{1}{2}a$ quando $s = a$. Basterà dunque staccare dalla (M_0) un arco metà di OM , a partire dall'origine, e condurlo per l'altro estremo a toccare in M l'arco OM : l'origine andrà a collocarsi nel baricentro cercato. Nella scelta del punto M_0 ci può anche guidare la considerazione che il contatto dei due archi deve risultare d'un ordine superiore (IV, 1) giacchè per $s = a$ la seconda formola (11) dà $\rho = \rho_0$. Finalmente una terza determinazione del punto M_0 si deduce dall'eguaglianza

$$\int_0^a \frac{ds}{\rho} = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{ds_0}{\rho_0},$$

per la quale si vede che, messi in contatto i due archi nel modo anzidetto, le loro tangenti negli altri estremi son parallele.

9. Costruzione cinematica dei baricentri. Supponiamo che le curve (M) ed (M_0) siano condotte a toccarsi in due punti corrispondenti, e nel dominio del punto di contatto si consideri un'altra coppia M', M'_0 di simili punti. Siano C e C_0 i centri di curvatura delle due curve, in M . Dalle (10) si deduce, osservando le (11),

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = \frac{s}{a} = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{ds_0}{ds},$$

e però il punto Γ_0 si trova all'intersezione della retta $M\Gamma$ con la parallela condotta per C_0 a CF . Ne segue che, se il piano della (M_0) subisce intorno ad

M una dilatazione o una contrazione, che porti C_0 in C , per effetto della stessa deformazione il punto Γ_0 si trasferisce in Γ , il punto M'_0 in M' , e però il contatto fra le due curve, nei punti corrispondenti, persiste quando una di esse rotola sull'altra. Dunque, se la curva (M) è, nell'origine degli archi, messa a contatto, in un punto G convenientemente scelto, con la corrispondente curva (M_0) , e se questa si sviluppa su (M) dilatandosi o contraendosi intorno al punto di contatto, in modo che fra le due curve si conservi costantemente un contatto del secondo ordine, *il punto G è ad ogni istante il baricentro dell'arco OM* . Così, per qualunque curva data nel piano, si può in modo cinematicamente intelligibile costruire il baricentro d'un arco qualsiasi, previa la conoscenza di un'altra curva, assai facile a determinare mercè le (11).

10. Esempi: *a)* Nella figura (§ 6, *a*) fatta per costruire il baricentro d'un arco di circolo apparisce chiaro l'arco di sviluppante GM , costantemente osculato in M dalla circonferenza fissa; e dalle (11), per $\rho = a$, si ricava appunto $\rho_0^2 = 2as_0$, equazione d'una sviluppante di circolo, simile a quella che contiene l'arco GM . E si noti che, mentre la cuspidale non cessa di segnare il baricentro dell'arco OM , la tangente cuspidale si mantiene parallela alla tangente OT .

b) Dalle (11) si vede che ρ_0 è proporzionale ad s_0 quando ρ è proporzionale ad s , vale a dire che, se (M) è una spirale logaritmica, anche (M_0) è una spirale logaritmica. Costruiti (*cf.* 6, *b*) i punti C e D relativi alla prima spirale, quali sono gli analoghi punti C_0 e D_0 per la seconda spirale, tangente in M alla prima? Giacchè il contatto è del secondo ordine, C_0 coincide con C ; e poichè, per un'altra osservazione fatta nel § 8, l'arco GM della seconda spirale, che si rettifica appunto in D_0M , dev'essere la metà dell'arco OM , cioè di DM , si vede che D_0 è il punto medio di DM . Ed ora è chiaro che, come O è la proiezione di M su CD , così G è la proiezione di M su CD_0 .

c) Nel caso d'una clotoide la seconda formola (11) dà $\rho_0 = \text{costante}$, vale a dire che, se una circonferenza variabile si sviluppa sopra una clotoide, osculandola costantemente, un suo punto descrive quella baricentrica della clotoide, che prende origine nel punto d'inflessione. È questa, diversamente enunciata, la proprietà trovata nel § 6: vi si perviene più direttamente, e con maggior precisione, utilizzando le cose dette nel § 8. Infatti, dopo aver constatato che, se (M) è una clotoide, (M_0) è un circolo, si può subito aggiungere che questo è il circolo osculatore in M , e si costruisce poi il baricentro G portando sulla circonferenza, nel verso negativo, un arco MG , lungo quanto la metà dell'arco MO di clotoide, o pure osservando che la normale in G , alla circonferenza e la normale inflessionale della clotoide son parallele.

d) Se $\rho = ks^n$ è l'equazione della curva (M) , le (11) danno $\rho_0 = k_0 s_0^{\frac{n+1}{2}}$ per (M_0) . Si ritrovano così ($n=0, 1, -1$) i risultati precedenti, e si vede inoltre che per la costruzione dei baricentri d'una n^{ima} sviluppante di circolo occorre una $(2n+1)^{\text{ima}}$ sviluppante. Similmente si trova che occorre un'asteroide per una cicloide, una cicloide per un'epicicloide bicuspidale, una cardioide per l'epicicloide stellata del § 6; ecc. Più generalmente, per ogni linea cicloidale occorre una linea analoga, in modo che ad un vertice della linea fissa corrisponda una cuspidale della linea mobile.

e) Le formole (10) e la seconda delle (11) fanno subito vedere che, quando la curva (M) è definita da una relazione *omogenea* fra il raggio di curvatura e le coordinate del baricentro, la stessa relazione fra il raggio di curvatura e le coordinate d'un punto fisso definisce la corrispondente curva (M₀). Ne segue, per esempio, che alle curve studiate nell'applicazione (d) del § 6 corrispondono *le spirali sinusoidi*. Del resto, se si pone $s^2 = 2as_0$ e $\rho_0 = at$ nelle (9), si ottiene appunto (cfr. III, 19) l'equazione delle spirali sinusoidi:

$$s_0 = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{a_0}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}} .$$

Il punto generatore della baricentrica è il *polo* stesso della spirale, perchè (III, 15) solo nel polo si può avere $\rho_0 = 0$. Il polo deve dunque appartenere, ed effettivamente (III, 20) appartiene alla spirale per $n \geq 0$.

11. Ognuna delle proprietà fin qui trovate per talune curve sussiste per una curva qualunque, purchè si faccia variare convenientemente la densità lungo la curva stessa. Se con σ si rappresenta la massa deposta sull'arco OM, alle formole (3) bisogna sostituire

$$\frac{d\sigma x}{ds} = \frac{\sigma y}{\rho} - \sigma \quad , \quad \frac{d\sigma y}{ds} = -\frac{\sigma x}{\rho} \quad , \quad (13)$$

e queste, ponendovi

$$\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{y} = \frac{\sigma}{a} = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{ds_0}{ds} \quad ,$$

si riducono alle (12). Adunque, immaginando ripetute le considerazioni del § 9, si riesce sempre a costruire per ogni curva (M), e per una data distribuzione di massa, una curva (M₀), che nel suo sviluppo su (M), dilatandosi o contraendosi intorno al punto di contatto in guisa da conservare con (M) un contatto superiore, trascina con sè, nel moto e nella deformazione, il baricentro della massa distribuita lungo quell'arco di (M), che ha subito fin dall'origine il contatto della curva mobile. L'equazione di questa si trova eliminando s fra le relazioni

$$as_0 = \int \sigma ds \quad , \quad a\rho_0 = \sigma\rho \quad . \quad (14)$$

Nei singoli casi l'interpretazione geometrica dei risultati così ottenuti fornisce una costruzione del baricentro, che conviene d'altronde ad una curva qualunque, purchè si assuma per σ una speciale funzione di s .

12. **Esempi:** a) All'equazione intrinseca di qualunque curva si può dar la forma $\sigma\rho = a^2$ prendendo μ proporzionale alla derivata della curvatura. Allora la seconda formola (14) dà $\rho_0 = a$, e però son vere, per quella particolare distribuzione di massa, le proprietà baricentriche della clotoide. Adunque *un centro di similitudine dei circoli osculatori negli estremi di qualunque arco d'una curva qualunque è baricentro d'una massa distribuita lungo l'arco con densità proporzionale*

alla variazione della curvatura. In particolare, se si prende $\sigma = a\varphi$, si vede che una curva a noi già nota (I, 11, a) è caratterizzata dalla proprietà di aver sempre in linea retta il baricentro di curvatura di qualunque arco ed i centri di curvatura negli estremi dell'arco stesso.

b) Ogni modo di soddisfare alle (13) fornisce particolari costruzioni di baricentri. Ci limitiamo a segnalare quella che risulta dal porre

$$\sigma x = -ay_0, \quad \sigma y = a(x_0 + s) \quad (15)$$

nelle (13), le quali si riducono così alle condizioni d'immobilità del punto (x_0, y_0) nel piano di (M), purchè si abbia $\sigma\rho = as$. Si riconosce poi, come nel § 7, che il detto punto è l'origine degli archi. Intanto dalle (15) e dalla condizione trovata si deduce, eliminando σ ,

$$xx_0 + yy_0 = -sx = \rho y_0.$$

Dunque, per qualunque curva, le *perpendicolari abbassate da M e da C su OD e su OM s'incontrano nel baricentro d'una massa distribuita sull'arco OM con densità proporzionale alla variazione del prodotto dell'arco per la curvatura.* In particolare, se si considerano le curve $\rho = ks^n$, si trova $\sigma = (n-1)a\varphi$, e però la costruzione precedente fornisce, per tali curve, il baricentro di curvatura.

Inoltre, se si osserva che, in questo caso, dalle (14) risulta $\rho_0 = k_0 s_0^{\frac{1}{2-n}}$, si vede (II, 13, i) che la curva (M₀) è una sviluppante di (M).

VII. ANALISI BARICENTRICA.

1. La nozione di baricentro serve di base ad un elegante metodo di analisi geometrica, che noi non potremmo qui esporre per intero senza uscire dal campo della pura geometria intrinseca; ci limiteremo pertanto a porne in luce, per via di esercizi, alcuni fra i più semplici ed essenziali vincoli con l'analisi intrinseca delle curve piane. Prima ricordiamo (VI, 1) che il baricentro M delle masse μ_1 e μ_2 , deposte nei punti A_1, A_2 , appartiene alla retta A_1A_2 , ed è tale che

$$\mu_1 \cdot MA_1 + \mu_2 \cdot MA_2 = 0. \quad (1)$$

Ad ogni coppia di valori di μ_1 e μ_2 corrisponde dunque, sulla retta, un punto M, che corrisponde anche ad infinite altre coppie (μ_1, μ_2) , ottenute moltiplicandone una per un numero arbitrario, giacchè in tal modo, infatti, non si altera la (1). Orbene, per fare che un punto corrisponda ad una sola coppia (μ_1, μ_2) , si conviene di porre $\mu_1 + \mu_2 = 1$: si genera così l'intera retta mercè la varia distribuzione della massa-unità fra i punti fondamentali A_1, A_2 . Quando M si allontana indefinitamente sulla retta, il rapporto delle sue distanze

ai punti fondamentali tende all'unità, e per la (1) si vede che *l'eguaglianza* $\mu_1 + \mu_2 = 0$ *tende ad esser vera*. Noi, per abbreviare, diremo che *si ha* $\mu_1 + \mu_2 = 0$ *nel punto all'infinito*. Se N è il punto individuato da masse proporzionali a $-\mu_1$ e μ_2 , la (1) mostra che $(MNA_1A_2) = -1$, vale a dire che N è il conjugato armonico di M rispetto ai punti fondamentali. Così ci spieghiamo nuovamente come, essendo $\mu_1 - \mu_2 = 0$ nel punto medio di A_1A_2 , conjugato del punto all'infinito, si possa ben dire che all'infinito si ha $\mu_1 + \mu_2 = 0$.

2. Analogamente, se A_1, A_2, A_3 sono i vertici d'un triangolo non nullo (disposti nell'ordine in cui sono incontrati da un punto che percorre il perimetro del triangolo lasciando l'area a sinistra), dalla massa-unità, variamente distribuita fra i tre vertici, nasce una doppia infinità di terne di masse μ_1, μ_2, μ_3 , e da ciascuna terna un punto (baricentro), che si può costruire dividendo A_2A_3 nel rapporto $\mu_3 : \mu_2$, in L, poi A_1L nel rapporto $(\mu_2 + \mu_3) : \mu_1$. Inversamente ad ogni punto del piano corrisponde una terna di valori μ_1, μ_2, μ_3 (*coordinate baricentriche* del punto), tali che

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad (2)$$

e ne corrisponde una sola, perchè, se la retta A_1M divide A_2A_3 , in L, nel rapporto k , e se M divide A_1L nel rapporto k' , si può sempre, ed in un sol modo, soddisfare alla (2) ed alle condizioni

$$\mu_3 = k\mu_2, \quad \mu_2 + \mu_3 = k'\mu_1. \quad (3)$$

Per quest'ultima, col tendere di k' a -1 , si vede che, *quando M si allontana indefinitamente, l'equazione*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \quad (4)$$

tende ad essere verificata.

3. **Retta.** Se si tien presente la (2), le formole (1) del precedente capitolo diventano

$$x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3, \quad (5)$$

e però le relazioni lineari fra le coordinate cartesiane x ed y si possono trasformare in relazioni lineari *ed omogenee* fra le coordinate baricentriche; e viceversa, data una siffatta relazione, si potrà sempre trasformarla in una relazione lineare fra le coordinate cartesiane mercè le formole

$$a^2 \mu_1 = (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + (x_2 y_3 - x_3 y_2), \quad \text{ecc.}, \quad (6)$$

che si ottengono risolvendo le equazioni (2) e (5) rispetto alle μ , e rappresentando con a^2 il doppio dell'area del triangolo fondamentale:

$$a^2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Adunque ogni equazione lineare fra le coordinate baricentriche rappresenta una retta. Per esempio, fissato k , la prima equazione (3) rappresenta la retta che per A_1 va a dividere A_2A_3 nel rapporto k . Similmente la seconda eguaglianza (3), in cui si suppone costante k' , è l'equazione d'una parallela al lato A_2A_3 . Tale equazione si può anche scrivere, in forma non omogenea, $\mu_1 = costante$, e si riconosce così che, quando un punto si sposta parallelamente ad un lato del triangolo fondamentale, non varia la coordinata baricentrica relativa al vertice opposto. In particolare l'equazione del lato opposto ad A_1 è $\mu_1 = 0$. Finalmente si può dire che l'equazione (4) rappresenta la retta all'infinito. Ciò permette di scrivere subito la condizione di parallelismo di due rette

$$\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 = 0 \quad , \quad \beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2 + \beta_3\mu_3 = 0 \quad . \quad (8)$$

Affinchè queste concorrano, con una terza, in un punto, occorre e basta che sia nullo il determinante formato dai coefficienti delle tre equazioni, perchè appunto questa è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di valori non tutti nulli delle μ , soddisfacenti al sistema delle tre equazioni. Ciò premesso, dire che due rette son parallele equivale a dire che concorrono sulla retta all'infinito, e però la *condizione del parallelismo* si esprime ponendo uguale a zero il determinante del sistema costituito dalle equazioni (4) ed (8):

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (9)$$

4. Distanza di due punti. Siano $\delta\mu_1, \delta\mu_2, \delta\mu_3$ le variazioni che subiscono le coordinate baricentriche quando si passa da M ad un altro punto qualsiasi M' , e si cerchi di calcolare la distanza R dei due punti. Siano a_1, a_2, a_3 le lunghezze dei lati del triangolo. Se il segmento MM' fosse parallelo ad un lato, per esempio ad A_2A_3 , la sua lunghezza sarebbe espressa, anche nel segno, da $a_1\delta\mu_3$ o pure da $-a_1\delta\mu_2$, come risulta facilmente dalla similitudine dei triangoli A_1MM', A_1LL' . Comunque siano situati M ed M' , si consideri il punto d'incontro M'' delle parallele condotte per M ed M' ai lati A_2A_1 ed A_3A_1 . Evidentemente le coordinate di M'' sono $\mu_1 - \delta\mu_2, \mu_2 + \delta\mu_2, \mu_3$, e però due lati del triangolo $MM'M''$ hanno le lunghezze $a_2\delta\mu_3$ e $-a_3\delta\mu_2$. Se poi si osserva che l'angolo opposto al lato R è uguale all'angolo A_1 , si ha

$$R^2 = a_2^2(\delta\mu_3)^2 + a_3^2(\delta\mu_2)^2 + (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)\delta\mu_2\delta\mu_3 \quad ,$$

cioè, essendo $\delta\mu_1 + \delta\mu_2 + \delta\mu_3 = 0$,

$$R^2 = -(a_1^2\delta\mu_2\delta\mu_3 + a_2^2\delta\mu_3\delta\mu_1 + a_3^2\delta\mu_1\delta\mu_2) \quad . \quad (10)$$

In particolare, quando i due punti sono infinitamente vicini, il quadrato della loro distanza è

$$ds^2 = -(a_1^2d\mu_2d\mu_3 + a_2^2d\mu_3d\mu_1 + a_3^2d\mu_1d\mu_2) \quad . \quad (11)$$

5. Ora siamo in grado di trovare anche la *condizione di perpendicolarità* di due rette: sian queste le (8), sulle quali prenderemo i punti P e Q, fuori del punto d'incontro M. Rappresentiamo con lettere ε ed η le variazioni delle coordinate nel passaggio da M a P ed a Q. Evidentemente le ε e le η soddisfano alle (8), ed inoltre, perchè sussiste in ogni punto la (2), si ha

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad , \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \quad .$$

Ne segue

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha_2 - \alpha_3} = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_3 - \alpha_1} = \frac{\varepsilon_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad , \quad \frac{\eta_1}{\beta_2 - \beta_3} = \frac{\eta_2}{\beta_3 - \beta_1} = \frac{\eta_3}{\beta_1 - \beta_2} \quad . \quad (12)$$

Ciò premesso, si applichi la formola (10) alle distanze MP, MQ, PQ, nella relazione $(PQ)^2 = (MP)^2 + (MQ)^2$, necessaria e sufficiente per la perpendicolarità. Si ottiene

$$\begin{aligned} & a_1^2(\varepsilon_2 - \eta_2)(\varepsilon_3 - \eta_3) + \dots = a_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + \dots + a_1^2\eta_2\eta_3 + \dots \quad , \\ \text{cioè} \quad & a_1^2(\varepsilon_2\eta_3 + \varepsilon_3\eta_2) + a_2^2(\varepsilon_3\eta_1 + \varepsilon_1\eta_3) + a_3^2(\varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon_2\eta_1) = 0 \quad , \quad (13) \end{aligned}$$

dove alle ε ed alle η si debbono sostituire le quantità proporzionali (12).

6. **Copie di rette.** Moltiplicando fra loro le (8) si trova un'equazione quadratica

$$\sum_{i,j} c_{ij} \mu_i \mu_j = 0 \quad , \quad (14)$$

la *discriminante nullo*, che dev'essere sempre soddisfatta sulle due rette, e mai fuori di esse. Inversamente, data un'equazione (14), *il cui discriminante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

sia nullo, si sa dall'algebra che l'equazione stessa è scomponibile in due equazioni lineari, e rappresenta perciò una *coppia di rette*. A quale altra condizione debbono soddisfare i coefficienti affinchè le rette siano parallele o perpendicolari? Se si osserva che

$$c_{11} = 2\alpha_1\beta_1 \quad , \quad c_{22} = \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_2 \quad , \quad \text{ecc.} \quad ,$$

e che, per conseguenza, $\varepsilon_2\eta_3 + \varepsilon_3\eta_2$ è proporzionale a

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_3) + (\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_1 - \beta_2) = c_{11} - c_{12} - c_{13} + c_{23} \quad ,$$

si vede subito, sostituendo in (13), che la *condizione di perpendicolarità* è

$$\begin{aligned} & (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)c_{23} + (a_2^2 - a_3^2 - a_1^2)c_{31} + (a_3^2 - a_1^2 - a_2^2)c_{12} \\ & \quad + a_1^2c_{11} + a_2^2c_{22} + a_3^2c_{33} = 0 \quad . \quad (15) \end{aligned}$$

Similmente, per esprimere che le rette sono parallele, si consideri il determi-

nante δ , primo membro di (9), e si osservi che

$$-\delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \alpha_1 \\ 1 & \beta_2 & \alpha_2 \\ 1 & \beta_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+c_{11} & 1+c_{12} & 1+c_{13} \\ 1+c_{21} & 1+c_{22} & 1+c_{23} \\ 1+c_{31} & 1+c_{32} & 1+c_{33} \end{vmatrix},$$

cioè, rappresentando con σ la somma dei complementi algebrici di tutti gli elementi di Δ ,

$$-\delta^2 = \sigma + \Delta = \sigma.$$

Dunque la *condizione di parallelismo* è $\sigma = 0$. Inoltre, data la (14) a coefficienti reali, si vede che *le rette sono reali o immaginarie secondo che $\sigma < 0$ o $\sigma > 0$* .

7. **Esempii:** a) Sia $\mu_3 = k\mu_2$ l'equazione della perpendicolare abbassata da A_1 sul lato opposto. Si determina k esprimendo che per la coppia di rette $\mu_1\mu_3 = k^2\mu_1\mu_2$ è soddisfatta la condizione (15), e si trova così che l'equazione della retta considerata è

$$(a_3^2 + a_1^2 - a_2^2)\mu_2 = (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)\mu_3.$$

Dunque le perpendicolari abbassate dai vertici d'un triangolo sui lati opposti concorrono in un punto (*ortocentro*) definito da coordinate inversamente proporzionali alle quantità

$$a_2^2 + a_3^2 - a_1^2, \quad a_3^2 + a_1^2 - a_2^2, \quad a_1^2 + a_2^2 - a_3^2.$$

b) Una coppia di rette che da A_1 va a dividere armonicamente il lato opposto è rappresentata, per le cose dette in fine del § 1, dall'equazione $\mu_3^2 = k^2\mu_2^2$. Se si vuole che tali rette siano le bisettrici dell'angolo A_1 , bisogna determinare k in modo che sia soddisfatta la condizione (15), cioè dev'essere $a_2^2 = k^2a_3^2$. Le tre coppie di bisettrici degli angoli del triangolo fondamentale sono dunque rappresentate dalle equazioni

$$\frac{\mu_2^2}{a_3^2} = \frac{\mu_3^2}{a_2^2}, \quad \frac{\mu_3^2}{a_2^2} = \frac{\mu_1^2}{a_1^2}, \quad \frac{\mu_1^2}{a_1^2} = \frac{\mu_2^2}{a_2^2},$$

e però s'incontrano nei quattro punti che hanno le coordinate baricentriche proporzionali, in valore assoluto, ad a_1, a_2, a_3 . In particolare le tre bisettrici interne concorrono nel punto (*centro del circolo iscritto*) definito dalle coordinate

$$\mu_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad \mu_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad \mu_3 = \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

c) Per sapere in qual punto la retta $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 = 0$ incontra il lato A_2A_3 , bisogna porre $\mu_1 = 0$, ed allora μ_2 e μ_3 sono determinate dalle equazioni $\mu_2 + \mu_3 = 1, \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 = 0$. A quest'ultima si deve sostituire $\alpha_2\mu_2 - \alpha_3\mu_3 = 0$ se si vuole invece il conjugato armonico del punto d'incontro, rispetto alla coppia A_2A_3 . Ne segue che il punto P, definito dalle uguaglianze $\alpha_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2 = \alpha_3\mu_3$, è tale che ciascun lato del triangolo è diviso armonicamente dalla retta che congiunge P al vertice opposto e dalla retta considerata. Il punto P si chiama *polo trilineare* della retta, e viceversa questa è la *polare trilineare* di P. Se c_1, c_2, c_3 sono le coor-

dinate baricentriche d'un punto qualunque, l'equazione baricentrica della sua polare trilineare è

$$\frac{\mu_1}{c_1} + \frac{\mu_2}{c_2} + \frac{\mu_3}{c_3} = 0 .$$

In particolare si noti che la retta all'infinito ha il polo trilineare nel punto $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{3}$: è questo il punto in cui concorrono le mediane, e che si chiama semplicemente *baricentro* del triangolo.

8. Coniche. La sostituzione dei valori (5) nell'equazione cartesiana di una conica (III, 1) produce fra le coordinate baricentriche una relazione quadratica, che si può sempre rendere omogenea mercè la (2). Inversamente ogni equazione (14) si cambia, col sostituirvi i valori (6), in un'equazione del secondo grado fra x ed y , e rappresenta perciò una conica, che degenera in una coppia di rette quando fra i coefficienti intercede il vincolo $\Delta = 0$. Qualunque sia il valore di Δ , osserviamo che l'equazione ottenuta ponendo $c(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2$ nel secondo membro di (14) rappresenta, per ciascun valore di c , una conica. Le coniche corrispondenti agli infiniti valori di c si comportano all'infinito come la conica (14), giacchè all'infinito tende ad esser vera la (4). Esse hanno dunque gli assintoti paralleli, e però, per conoscere una coppia di rette parallele agli assintoti della conica (14), basterà indagare se a qualche valore di c corrisponde una conica degenera. Intanto si osservi che, per un valore qualunque di c , il discriminante è

$$\Delta' = \begin{vmatrix} c_{11} - c & c_{12} - c & c_{13} - c \\ c_{21} - c & c_{22} - c & c_{23} - c \\ c_{31} - c & c_{32} - c & c_{33} - c \end{vmatrix} = \Delta - c\sigma .$$

La somma σ' dei complementi algebrici degli elementi di Δ' è indipendente da c , perchè, se immaginiamo che si ritorni da Δ' a Δ aggiungendo c a tutti gli elementi di Δ' , troviamo, applicando l'ultima formola,

$$\Delta = \Delta' + c\sigma' = \Delta + c(\sigma' - \sigma) ; \text{ quindi } \sigma' = \sigma .$$

Ciò premesso, se $\sigma \geq 0$, al valore $c = \Delta : \sigma$ corrisponderà una coppia di rette, parallele agli assintoti della conica (14), o coincidenti con essi; e per l'osservazione finale del precedente paragrafo si potrà affermare che la detta conica è un'ellisse o un'iperbole secondo che $\sigma > 0$ o $\sigma < 0$. Se i coefficienti si fanno variare in modo che σ tenda a zero, le due rette tendono a diventar parallele, e però la condizione $\sigma = 0$ caratterizza la parabola, giacchè questa è (III, 2) la sola conica che all'infinito si comporti come una coppia di rette parallele (coincidenti): quando poi insieme a σ si annulla Δ , la parabola degenera in una coppia di rette parallele. L'iperbole equilatera si caratterizza esprimendo che ha gli assintoti ortogonali, cioè scrivendo la condizione (15), non per le c_{ij} , ma per le $c_{ij} - c$. Nel fare tale sostituzione si

vede subito che c sparisce, e si riconosce così che la stessa (15) è *necessaria e sufficiente perchè l'equazione (14) rappresenti un'iperbole equilatera*.

9. Tangente e normale, poli e polari, centro ed assintoti, polo di omologia: *a)* Siccome la tangente ad una curva $f(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0$ nel punto (v_1, v_2, v_3) si può considerare come determinata da questo punto e dal punto infinitamente vicino $(v_1 + dv_1, v_2 + dv_2, v_3 + dv_3)$ sulla curva, è chiaro che la sua equazione è

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & v_1 & dv_1 \\ \mu_2 & v_2 & dv_2 \\ \mu_3 & v_3 & dv_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

dove, essendo $f(v_1, v_2, v_3) = 0$, è pure

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial f}{\partial v_2} dv_2 + \frac{\partial f}{\partial v_3} dv_3 = 0, \quad dv_1 + dv_2 + dv_3 = 0.$$

Ne segue che $v_2 dv_3 - v_3 dv_2$ è proporzionale a

$$v_2 \left(\frac{\partial f}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial v_3} \right) - v_3 \left(\frac{\partial f}{\partial v_2} - \frac{\partial f}{\partial v_1} \right) = \frac{\partial f}{\partial v_1} - \left(v_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial v_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial v_3} \right);$$

quindi la (16) diventa

$$(\mu_1 - v_1) \frac{\partial f}{\partial v_1} + (\mu_2 - v_2) \frac{\partial f}{\partial v_2} + (\mu_3 - v_3) \frac{\partial f}{\partial v_3} = 0.$$

Si stabilisce poi l'equazione della normale applicando la condizione (13). Quando la funzione f è omogenea, l'equazione della tangente si riduce, in virtù del noto teorema di Eulero, alla forma più semplice

$$\mu_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial v_2} + \mu_3 \frac{\partial f}{\partial v_3} = 0;$$

e questa, nel caso delle coniche, diventa

$$\sum_{i,j} c_{ij} \mu_i v_j = 0. \quad (17)$$

b) La relazione (17) si traduce geometricamente, per la sua bilinearità, in una corrispondenza notevolissima fra i punti e le rette del piano. Quando si fissano le v , senza supporre che (v_1, v_2, v_3) sia un punto della conica, la detta equazione rappresenta una retta, che si chiama *polare* del punto (v_1, v_2, v_3) rispetto alla conica (14), ed il punto si chiama *polo* di quella retta. Ora se in (17) si fissano invece per le μ valori qualunque, le v vengono a soddisfare appunto all'equazione della polare di (μ_1, μ_2, μ_3) , e però *i poli di tutte le rette che passano per un punto stanno sulla polare di questo punto*. Ne segue che le polari di due punti P e P' s'incontrano nel polo di PP' . Se, per esempio, i vertici d'un triangolo sono i poli dei lati d'un altro triangolo, i lati del primo sono le polari dei vertici del secondo. Due siffatti triangoli diconsi *conjugati* fra loro rispetto alla conica. Ponendo per le v successiva-

mente le coordinate dei vertici del triangolo fondamentale si vede che le equazioni dei lati del triangolo conjugato, rispetto alla conica (14), sono

$$c_{11}\mu_1 + c_{12}\mu_2 + c_{13}\mu_3 = 0, \quad c_{21}\mu_1 + c_{22}\mu_2 + c_{23}\mu_3 = 0, \quad c_{31}\mu_1 + c_{32}\mu_2 + c_{33}\mu_3 = 0. \quad (18)$$

Queste si riducono alle equazioni dei lati quando in (14) mancano i termini rettangoli. Allora il triangolo è conjugato a sè stesso, e la conica si dice *conjugata* al triangolo. Adunque le infinite coniche rappresentate dall'equazione

$$c_1\mu_1^2 + c_2\mu_2^2 + c_3\mu_3^2 = 0$$

sono tali che ciascun lato del triangolo fondamentale è la polare del vertice opposto. Per $\mu_1 = 0$ si trovano valori del rapporto $\mu_2:\mu_3$, uguali soltanto in valore assoluto. Dunque, per l'osservazione finale del § 1, *ogni conica conjugata ad un triangolo ne divide armonicamente i lati*. Segue da ciò che qualunque segmento rettilineo, con un estremo in P e l'altro sulla polare di P rispetto ad una conica, è diviso armonicamente dalla conica stessa. Basta infatti, per convincersene, assumere come vertici del triangolo fondamentale il punto P, il punto d'incontro P' della polare di P con la retta che si considera, ed il polo di PP'. In altri termini, *la polare d'un punto P rispetto ad una conica è il luogo dei conjugati armonici di P in tutte le corde determinate dalla conica sulle rette uscenti da P*.

c) In particolare, se si osserva (cfr. III, 3) che, su ciascun diametro, il conjugato armonico del centro sta all'infinito, si vede che *il centro d'una conica è il polo della retta all'infinito*. Dunque, se v_1, v_2, v_3 sono le coordinate del centro, l'equazione (17) deve ridursi alla (4), e però si deve avere

$$c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 = c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3. \quad (19)$$

Se c è il comune valore di queste tre quantità, si può anche scrivere, in virtù di (2),

$$(c_{11} - c)v_1 + (c_{12} - c)v_2 + (c_{13} - c)v_3 = 0,$$

per $i=1,2,3$. Affinchè questo sistema sia soddisfatto da valori non tutti nulli delle v , occorre e basta che sia nullo il suo determinante ($\Delta - c\sigma$), cioè che si abbia $c = \Delta:\sigma$. Intanto, se con σ_i si rappresenta la somma dei complementi algebrici degli elementi della i^{ma} linea di Δ , si ha sempre

$$c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 + c_{13}\sigma_3 = \Delta,$$

e ciò permette di veder subito che alle precedenti equazioni si soddisfa prendendo

$$v_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma}, \quad v_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma}, \quad v_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma} : \quad (20)$$

son queste le *coordinate del centro*. Quanto agli assintoti, già si è visto (§ 8) che son paralleli alle rette della coppia

$$\sum_{i,j} c_{ij}\mu_i\mu_j = \frac{\Delta}{\sigma},$$

e per dimostrare che questa è appunto l'equazione complessiva degli assintoti, basta far vedere che la soddisfano i valori (20). Orbene si ha

$$\sum_{i,j} c_{ij} \nu_i \nu_j = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} c_{ij} \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i \sigma_i \Delta = \frac{\Delta}{\sigma} .$$

Ed ora siamo finalmente in grado di affermare che l'equazione (14), quando nel secondo membro si pone c al posto di zero, rappresenta, al variare di c , le infinite coniche assintotiche ad una stessa coppia di rette.

d) Ponendo $\mu_i = 0$ nella i^{ma} equazione (18) si ottiene un punto, le cui coordinate soddisfano all'equazione

$$\frac{\mu_1}{c_{23}} + \frac{\mu_2}{c_{31}} + \frac{\mu_3}{c_{12}} = 0 , \quad (21)$$

indipendente da i . Dunque sulla retta (21) ciascun lato del triangolo fondamentale incontra il corrispondente lato del triangolo conjugato, e però *due triangoli conjugati rispetto ad una conica sono omologici*, e l'asse di omologia è rappresentato dall'equazione (21). Il fatto dell'omologia si può anche stabilire considerando i vertici. Il sistema costituito dalle equazioni (18), quando in luogo della i^{ma} si pone la (2), definisce quel vertice del triangolo fondamentale, che corrisponde ad A_i . Ne segue che le coordinate di tale vertice sono proporzionali a $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3}$, se con γ_{ij} si rappresenta il complemento algebrico di c_{ij} in Δ . Dunque le equazioni delle rette che congiungono i vertici corrispondenti dei due triangoli sono

$$\mu_2 \gamma_{13} = \mu_3 \gamma_{12} , \quad \mu_3 \gamma_{21} = \mu_1 \gamma_{23} , \quad \mu_1 \gamma_{32} = \mu_2 \gamma_{31} ,$$

e però tali rette concorrono nel punto (*centro di omologia*) definito dalle uguaglianze

$$\mu_1 \gamma_{23} = \mu_2 \gamma_{31} = \mu_3 \gamma_{12} . \quad (22)$$

Per brevità questo punto si chiama *polo di omologia* della conica rispetto al triangolo che si considera.

10. Esempii: a) Affinchè $M(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ sia il polo trilineare d'una retta che passa per un dato punto $P(c_1, c_2, c_3)$ occorre e basta (§ 7, c) che sia soddisfatta la condizione

$$\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} + \frac{c_3}{\mu_3} = 0 ,$$

cioè che si abbia

$$c_1 \mu_2 \mu_3 + c_2 \mu_3 \mu_1 + c_3 \mu_1 \mu_2 = 0 . \quad (23)$$

Questa è l'equazione più generale d'una conica *circoscritta* al triangolo fondamentale, perchè, se si vuole che la (14) sia soddisfatta dalle coordinate di A_i , si deve porre $c_{ii} = 0$. Adunque, se una retta gira intorno ad uno dei suoi punti, *il suo polo trilineare rispetto ad un triangolo descrive una conica circoscritta al triangolo stesso*. Se poi si applicano le (22) si vede che P è il polo di omologia della conica. Applicando invece le (20) si trova che il centro Q della conica è definito

da coordinate v_1, v_2, v_3 , proporzionali a

$$c_1(c_2 + c_3 - c_1) \quad , \quad c_2(c_3 + c_1 - c_2) \quad , \quad c_3(c_1 + c_2 - c_3) \quad .$$

Si osservi intanto che

$$c_2 v_3 + c_3 v_2 = c_3 v_1 + c_1 v_3 = c_1 v_2 + c_2 v_1 \quad , \quad (24)$$

come, del resto, risulta immediatamente dalle stesse (19). Le ultime relazioni, per la loro simmetria, pongono in luce il vincolo di reciprocità esistente fra P e Q. Ne segue che le coniche circoscritte ad un triangolo si possono associare per coppie tali che, in ogni coppia, una qualunque delle due coniche è il luogo dei poli trilineari dei diametri dell'altra. Le due coniche coincidono quando il centro cade nel baricentro (§ 7, c) del triangolo. Se poi si vuole che la conica circoscritta sia un'iperbole equilatera, si deve esprimere che la condizione (15) è soddisfatta dai coefficienti dell'equazione, vale a dire che si ha

$$(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)c_1 + (a_3^2 + a_1^2 - a_2^2)c_2 + (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)c_3 = 0 \quad .$$

Questa eguaglianza ci dice che il polo di omologia sta sulla polare trilineare dell'ortocentro (§ 7, a), e però nell'ortocentro concorrono tutte le iperboli equilatera circoscritte.

b) Perchè la conica (14) sia inscritta al triangolo fondamentale bisogna che ponendo, per esempio, $\mu_1 = 0$ nell'equazione (14), l'eguaglianza così ottenuta, cioè $c_{22}\mu_2^2 + c_{33}\mu_3^2 + 2c_{23}\mu_2\mu_3 = 0$, abbia le radici uguali. Dunque, chiamati c_1, c_2, c_3 i valori dei coefficienti c_{22}, c_{33}, c_{23} , si dovrà avere $c_i^2 c_{ii} = c_{11} c_{22} c_{33}$, e per conseguenza, se si ha cura di evitare l'annullamento del discriminante, si vede che $c_i c_{ii} = -c_1 c_2 c_3$, vale a dire che una conica inscritta è rappresentata dall'equazione

$$\frac{\mu_1^2}{c_1^2} + \frac{\mu_2^2}{c_2^2} + \frac{\mu_3^2}{c_3^2} - 2 \frac{\mu_2 \mu_3}{c_2 c_3} - 2 \frac{\mu_3 \mu_1}{c_3 c_1} - 2 \frac{\mu_1 \mu_2}{c_1 c_2} = 0 \quad ,$$

ulteriormente riducibile alla forma semplicissima

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{c_1}} + \sqrt{\frac{\mu_2}{c_2}} + \sqrt{\frac{\mu_3}{c_3}} = 0 \quad ,$$

che include quattro equazioni secondo i segni che si attribuiscono ai radicali. Dalle (22) si deduce facilmente che c_1, c_2, c_3 sono proporzionali alle coordinate del polo di omologia, e le (20) mostrano che il centro è definito da coordinate proporzionali a $c_1(c_2 + c_3), c_2(c_3 + c_1), c_3(c_1 + c_2)$. Ora è facile rispondere alla questione: qual'è il luogo dei poli di omologia delle parabole inscritte o circoscritte ad un triangolo? Nell'uno o nell'altro caso le coordinate del polo di omologia debbono essere tali che risulti uguale a zero la somma delle coordinate del centro, e però si deve avere

$$c_2 c_3 + c_3 c_1 + c_1 c_2 = 0 \quad \text{o} \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - 2c_2 c_3 - 2c_3 c_1 - 2c_1 c_2 = 0 \quad ,$$

cioè i poli debbono appartenere a quella, fra le ellissi circoscritte o inscritte, che ha il centro (ed il polo di omologia) nel baricentro del triangolo.

c) L'equazione del circolo circoscritto si deduce facilmente dalla formola (10), che dà

$$a_1^2(\mu_2 - v_2)(\mu_3 - v_3) + a_2^2(\mu_3 - v_3)(\mu_1 - v_1) + a_3^2(\mu_1 - v_1)(\mu_2 - v_2) + R^2 = 0 \quad . \quad (25)$$

Basta osservare che questa equazione deve ridursi alla forma (23), per ottenere subito

$$a_2^2 v_2 + a_3^2 v_3 = a_3^2 v_1 + a_1^2 v_3 = a_1^2 v_2 + a_2^2 v_1,$$

e per concludere dal paragone con (24) che il polo di omologia è definito da coordinate proporzionali ai quadrati dei lati corrispondenti: un tal punto da molti è chiamato *punto di Lemoine*. Intanto, poichè l'equazione del circolo circoscritto deve ridursi alla forma

$$a_1^2 \mu_2 \mu_3 + a_2^2 \mu_3 \mu_1 + a_3^2 \mu_1 \mu_2 = 0,$$

si vede, anche senza più servirsi della (25), ma richiamando la nota relazione

$$\begin{aligned} 4a^4 &= 2a_2^2 a_3^2 + 2a_3^2 a_1^2 + 2a_1^2 a_2^2 - a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3), \end{aligned}$$

che le coordinate del centro del circolo circoscritto sono date dalle formole

$$4a^4 v_1 = a_1^2(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2), \quad 4a^4 v_2 = a_2^2(a_3^2 + a_1^2 - a_2^2), \quad 4a^4 v_3 = a_3^2(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2).$$

Ora la (25) dà

$$R = \sqrt{a_1^2(\mu_2 v_3 + \mu_3 v_2) + \dots - a_1^2 v_2 v_3 - \dots} = \frac{a_1 a_2 a_3}{2a^2}.$$

Quanto al circolo inscritto, poichè (§ 7, b) le coordinate del centro sono proporzionali ad a_1, a_2, a_3 , è facile dedurne che quelle (c_1, c_2, c_3) del polo di omologia sono inversamente proporzionali ad $a_2 + a_3 - a_1, a_3 + a_1 - a_2, a_1 + a_2 - a_3$, e con ciò si può immediatamente scrivere l'equazione del detto circolo.

11. Ora prendiamo i soliti assi mobili, cioè la tangente e la normale in un punto d'una curva qualunque, e ricordiamo che le coordinate di ciascun vertice A_i del triangolo fondamentale soddisfano alle condizioni d'immobilità

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{y_i}{\rho} - 1, \quad \frac{dy_i}{ds} = -\frac{x_i}{\rho}.$$

Se μ_1, μ_2, μ_3 sono le coordinate baricentriche dell'origine mobile, le (6) diventano

$$a^2 \mu_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad a^2 \mu_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad a^2 \mu_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad (26)$$

e derivandole se ne trae subito, mercè le precedenti condizioni,

$$\frac{d\mu_1}{ds} = \frac{y_2 - y_3}{a^2}, \quad \frac{d\mu_2}{ds} = \frac{y_3 - y_1}{a^2}, \quad \frac{d\mu_3}{ds} = \frac{y_1 - y_2}{a^2}; \quad (27)$$

quindi

$$x_1 d\mu_1 + x_2 d\mu_2 + x_3 d\mu_3 = ds, \quad y_1 d\mu_1 + y_2 d\mu_2 + y_3 d\mu_3 = 0. \quad (28)$$

Ciò premesso, per calcolare la lunghezza dell'*arco elementare*, faremo uso dell'identità

$$\begin{aligned} k_2 k_3 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)^2 + k_3 k_1 (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3)^2 + k_1 k_2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 = \\ = \sum k_i \alpha_i^2 \cdot \sum k_i \beta_i^2 - \left(\sum k_i \alpha_i \beta_i \right)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

che ci servirà anche in seguito, e che risulta immediatamente dalla molti-

plicazione delle matrici

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} k_1\alpha_1 & k_2\alpha_2 & k_3\alpha_3 \\ k_1\beta_1 & k_2\beta_2 & k_3\beta_3 \end{vmatrix}.$$

Per $\alpha_i=1$, $\beta_i=x_i$, $k_i=d\mu_i$, se si osserva la prima eguaglianza (28), l'identità (29) diventa

$$(x_2 - x_3)^2 d\mu_2 d\mu_3 + (x_3 - x_1)^2 d\mu_3 d\mu_1 + (x_1 - x_2)^2 d\mu_1 d\mu_2 = -ds^2.$$

Se invece le β si pongono uguali alle y , e se si tien conto della seconda uguaglianza (28), si ottiene

$$(y_2 - y_3)^2 d\mu_2 d\mu_3 + (y_3 - y_1)^2 d\mu_3 d\mu_1 + (y_1 - y_2)^2 d\mu_1 d\mu_2 = 0;$$

si ritrova poi, sommando, la formola (11).

12. Altrettanto facile è il calcolo della *curvatura*. Derivando le (27) si ottiene, in virtù delle condizioni d'immobilità,

$$\frac{d^2\mu_1}{ds^2} = -\frac{x_2 - x_3}{a^2\rho}, \quad \frac{d^2\mu_2}{ds^2} = -\frac{x_3 - x_1}{a^2\rho}, \quad \frac{d^2\mu_3}{ds^2} = -\frac{x_1 - x_2}{a^2\rho}. \quad (30)$$

D'altra parte, se si prende il reciproco del determinante (7), si trova, tenendo presenti le (26),

$$a^2 = \begin{vmatrix} \mu_1 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ \mu_2 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ \mu_3 & x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix};$$

quindi, sostituendo nel secondo membro i valori (27) e (30), si perviene alla formola

$$\frac{1}{\rho} = a^2 \begin{vmatrix} \mu_1 & \frac{d\mu_1}{ds} & \frac{d^2\mu_1}{ds^2} \\ \mu_2 & \frac{d\mu_2}{ds} & \frac{d^2\mu_2}{ds^2} \\ \mu_3 & \frac{d\mu_3}{ds} & \frac{d^2\mu_3}{ds^2} \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Riesce ora facile la determinazione intrinseca di qualunque curva rappresentata da un'equazione baricentrica. Questa costituisce con (2) un sistema, che permette di esprimere le μ in funzione d'una sola variabile indipendente t . Orbene, se si utilizzano le formole (11) e (31), si vede che, note le funzioni

$$x = \sqrt{-\left(\frac{a_1^2 d\mu_2 d\mu_3}{a^2 dt dt} + \frac{a_2^2 d\mu_3 d\mu_1}{a^2 dt dt} + \frac{a_3^2 d\mu_1 d\mu_2}{a^2 dt dt}\right)}, \quad (32)$$

$$W = \begin{vmatrix} \mu_1 & \frac{d\mu_1}{dt} & \frac{d^2\mu_1}{dt^2} \\ \mu_2 & \frac{d\mu_2}{dt} & \frac{d^2\mu_2}{dt^2} \\ \mu_3 & \frac{d\mu_3}{dt} & \frac{d^2\mu_3}{dt^2} \end{vmatrix},$$

l'equazione intrinseca della curva considerata risulterà dall'eliminazione di t fra le uguaglianze

$$s = a \int x dt, \quad \rho = \frac{ax^3}{W}. \quad (33)$$

Si noti che, grazie alla (2), il determinante wronskiano si può scrivere più semplicemente così:

$$W = \frac{d\mu_2}{dt} \frac{d^2\mu_3}{dt^2} - \frac{d\mu_3}{dt} \frac{d^2\mu_2}{dt^2} = \frac{d\mu_3}{dt} \frac{d^2\mu_1}{dt^2} - \frac{d\mu_1}{dt} \frac{d^2\mu_3}{dt^2} = \frac{d\mu_1}{dt} \frac{d^2\mu_2}{dt^2} - \frac{d\mu_2}{dt} \frac{d^2\mu_1}{dt^2}. \quad (34)$$

Si facilita spesso il calcolo di W osservando che, se le μ sono soltanto proporzionali (non uguali) alle coordinate baricentriche, ed hanno, per conseguenza, una somma $k \geq 1$, il loro wronskiano ha il valore $k^3 W$.

13. Data la curva mediante l'equazione $f(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0$, si trovano subito tre quantità proporzionali ai differenziali delle μ , giacchè si ha

$$d\mu_1 + d\mu_2 + d\mu_3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu_1} d\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial \mu_2} d\mu_2 + \frac{\partial f}{\partial \mu_3} d\mu_3 = 0,$$

dove, nelle differenziazioni parziali rispetto alle μ , queste variabili s'intendono momentaneamente sciolte dal vincolo (2). D'altra parte il coefficiente di proporzionalità dipende dalla scelta della variabile indipendente t , e però si può sempre determinar questa in guisa che sia

$$\frac{d\mu_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mu_2} - \frac{\partial f}{\partial \mu_3}, \quad \frac{d\mu_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mu_3} - \frac{\partial f}{\partial \mu_1}, \quad \frac{d\mu_3}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mu_1} - \frac{\partial f}{\partial \mu_2}. \quad (35)$$

Dopo ciò la formola (32) diventa

$$a^2 x^2 = a_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mu_1} \right)^2 + a_2^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mu_2} \right)^2 + a_3^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mu_3} \right)^2 + (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) \frac{\partial f}{\partial \mu_2} \frac{\partial f}{\partial \mu_3} + (a_2^2 - a_3^2 - a_1^2) \frac{\partial f}{\partial \mu_3} \frac{\partial f}{\partial \mu_1} + (a_3^2 - a_1^2 - a_2^2) \frac{\partial f}{\partial \mu_1} \frac{\partial f}{\partial \mu_2}.$$

Similmente, se si sostituiscono i valori (35) in una delle (34), si ottiene

$$W = \left(\frac{\partial f}{\partial \mu_3} - \frac{\partial f}{\partial \mu_1} \right) \frac{d^2\mu_2}{dt^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mu_1} - \frac{\partial f}{\partial \mu_2} \right) \frac{d^2\mu_3}{dt^2} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{d^2\mu_i}{dt^2},$$

e se nei calcoli s'introduce l'operazione

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\mu_1}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu_1} + \frac{d\mu_2}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu_2} + \frac{d\mu_3}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu_3}, \quad (36)$$

si può anche scrivere

$$W = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{dt} - \sum_i \frac{d\mu_i}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mu_i} = - \sum_i \frac{d\mu_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{df}{dt} = - \frac{d^2 f}{dt^2}.$$

Finalmente, se si osserva che l'operazione (36) ripetuta dà

$$\frac{d^2}{dt^2} = \sum_{i,j} \frac{d\mu_i}{dt} \frac{d\mu_j}{dt} \frac{\partial^2}{\partial \mu_i \partial \mu_j},$$

si ottiene

$$W = - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \frac{d\mu_i}{dt} \frac{d\mu_j}{dt} . \quad (37)$$

14. L'ultima formola, quando vi si sostituiscono i valori (35), fa conoscere W in funzione delle derivate parziali prime e seconde di f rispetto alle μ . Essa si semplifica notevolmente quando la funzione f è omogenea: basta farne scomparire le derivate prime mediante le note relazioni euleriane

$$(n-1) \frac{\partial f}{\partial \mu_i} = \sum_j \mu_j \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_i \partial \mu_j} , \quad (38)$$

in cui n è il grado di f . Se inoltre si moltiplicano per $(n-1)^2$ i due membri di (37), si riconosce facilmente che il secondo si scinde in

$$(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2 H - \sigma \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \mu_i \mu_j ,$$

dove σ rappresenta la somma dei complementi algebrici di tutti gli elementi del determinante H , hessiano di f rispetto alle μ . Intanto per le stesse (38) si ha

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \mu_i \mu_j = n(n-1) f(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0 .$$

Dunque

$$(n-1)^2 W = H .$$

Così, finalmente, la seconda formola (33) dà

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)^2}{a^2 \rho} \left[a_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mu_1} \right)^2 + \dots + (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) \frac{\partial f}{\partial \mu_2} \frac{\partial f}{\partial \mu_3} + \dots \right]^{\frac{3}{2}} \\ & = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_1 \partial \mu_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_1 \partial \mu_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_2 \partial \mu_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_2 \partial \mu_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_3 \partial \mu_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_3 \partial \mu_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_3^2} \end{vmatrix} . \end{aligned} \quad (39)$$

15. Applicazione alle coniche. Per le coniche si ha

$$n=2 \quad , \quad f = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} \mu_i \mu_j \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = c_{ij} \quad , \quad H = \Delta ;$$

quindi la (39) prende la forma

$$\rho = \frac{\Phi^{\frac{3}{2}}}{a^2 \Delta} , \quad (40)$$

in cui la funzione

$$\Phi = a_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mu_1} \right)^2 + \dots + (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) \frac{\partial f}{\partial \mu_2} \frac{\partial f}{\partial \mu_3} + \dots$$

è un'altra forma quadratica. Il discriminante di tale forma differisce solo per un fattore Δ^2 dal determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & \frac{1}{2}(a_3^2 - a_1^2 - a_2^2) & \frac{1}{2}(a_2^2 - a_3^2 - a_1^2) \\ \frac{1}{2}(a_3^2 - a_1^2 - a_2^2) & a_2^2 & \frac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) \\ \frac{1}{2}(a_3^2 - a_1^2 - a_2^2) & \frac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) & a_3^2 \end{vmatrix} .$$

Questo è nullo, perchè nulla è la somma degli elementi di qualunque linea. Con un calcolo facile si trova poi che la somma dei complementi algebrici di tutti gli elementi è $9a^4$. Dunque (§ 6) l'equazione $\Phi=0$ rappresenta una coppia di rette immaginarie. Si deve poi notare che queste rette sono diametri della conica, perchè nel centro si ha (cfr. 9, c)

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_1} = \frac{\partial f}{\partial \mu_2} = \frac{\partial f}{\partial \mu_3} , \quad \Phi = 0 .$$

Si considerino intanto, insieme alla prima conica, tutte quelle che hanno i medesimi assintoti, e che sono rappresentate, come si sa (9, c), dall'equazione $f = \frac{1}{2}c$. Per esse da ogni c_{ij} si deve sottrarre c : così ogni derivata parziale prima di f diminuisce di c , e si riconosce subito che ciò non altera la funzione Φ . E poichè, da un'altra parte, questa funzione non può annullarsi insieme ad f se non quando si annulla ρ , si arriva alla conclusione che tutte le coniche assintotiche ad una data coppia di rette hanno le cuspidi su due comuni diametri immaginari. Un'altra interpretazione di Φ risulta dalla seguente osservazione. Se in (40) si fissa ad ar-

bitrio il valore di ρ , l'equazione che si ottiene, $\Phi = (a^2 \rho \Delta)^{\frac{2}{3}}$, rappresenta una conica, che incontra la conica data in quattro punti, nei quali ρ assume il valore prescritto. Le coniche corrispondenti agli infiniti valori di ρ sono ellissi concentriche: i loro assintoti sono appunto le rette $\Phi=0$.

16. Curve triangolari simmetriche. Le curve definite dall'equazione

$$c_1 \mu_1^n + c_2 \mu_2^n + c_3 \mu_3^n = 0 , \quad (41)$$

chiamate *triangolari simmetriche* da La Gournerie, sono molto interessanti perchè comprendono le coniche nelle principali loro situazioni rispetto al triangolo fondamentale. Infatti per $n=2$ si trova (9, b; 10, a, b) una conica *conjugata* al triangolo, per $n=-1$ una conica *circoscritta*, per $n=\frac{1}{2}$ una conica *inscritta*. La derivazione dell'equazione (41) dà, in virtù delle (27),

$$c_1 \mu_1^{n-1} (y_2 - y_3) + c_2 \mu_2^{n-1} (y_3 - y_1) + c_3 \mu_3^{n-1} (y_1 - y_2) = 0 . \quad (42)$$

Dunque $c_1 \mu_1^{n-1}$, $c_2 \mu_2^{n-1}$, $c_3 \mu_3^{n-1}$ sono rispettivamente proporzionali a

$$\mu_2 (y_1 - y_2) - \mu_3 (y_3 - y_1) = (\mu_2 + \mu_3) y_1 - (\mu_2 y_2 + \mu_3 y_3) = y_1 ,$$

ad y_2 e ad y_3 . Ciò premesso si ottiene, derivando (42),

$$\frac{1}{\rho} [c_1 \mu_1^{n-1} (x_2 - x_3) + \dots] = \frac{n-1}{\alpha^2} [c_1 \mu_1^{n-2} (y_2 - y_3)^2 + \dots] ,$$

cioè

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{n-1}{a^4} \left[\frac{y_1}{\mu_1} (y_2 - y_3)^2 + \dots \right], \quad (43)$$

dopo avere osservato che, per la formola (7),

$$(x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3 = -a^2.$$

Ora utilizziamo l'identità (29) ponendovi $\alpha=1, \beta=y, ky=\mu$. Evidentemente

$$\sum_i k_i \beta_i = \sum_i \mu_i = 1, \quad \sum_i k_i \beta_i^2 = \sum_i \mu_i y_i = 0.$$

Dunque

$$\frac{\mu_2 \mu_3}{y_2 y_3} (y_2 - y_3)^2 + \frac{\mu_3 \mu_1}{y_3 y_1} (y_3 - y_1)^2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{y_1 y_2} (y_1 - y_2)^2 = -1;$$

poi, sostituendo in (43),

$$\rho = \frac{a^4}{n-1} \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{y_1 y_2 y_3}. \quad (44)$$

Qui si osservi che, se due curve (41), corrispondenti a due valori n ed n' dell'esponente, si toccano in un punto, le loro curvature in questo punto si deducono subito l'una dall'altra, perchè, come ha osservato Jamet, la (44) dà

$$(n-1)\rho = (n'-1)\rho'.$$

17. Per costruire l'espressione (44) è utile adoperare le coordinate polari (r_i, θ_i) dei vertici A_i . Si ha $y_i = r_i \sin \theta_i$, e le formole (26) danno anche $a^2 \mu_i = -r_2 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)$, ecc.; poi, limitandosi al caso di $n = -1$, la formola (44) diventa

$$\rho = \frac{r_1 r_2 r_3}{2a^3} \cdot \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3) \sin(\theta_3 - \theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}.$$

Con questa Fouret ha potuto facilmente, dopo Chasles e Mannheim, risolvere il problema: *costruire il centro di curvatura in un punto M d'una conica, conoscendo tre punti della curva e la tangente in M*. Se invece dei tre punti si danno tre tangenti, il problema analogo è immediatamente riducibile al precedente. Infatti per $n = -1$ ed $n' = \frac{1}{2}$ il teorema di Jamet dà $4\rho = \rho'$, vale a dire che *se, di due coniche tangenti, una è circoscritta e l'altra inscritta ad uno stesso triangolo, la curvatura della prima è quadrupla di quella della seconda nel punto di contatto*. E se si considera anche il caso di $n=2$, si trova che, se C, C', C'' sono, in un punto M , i centri di curvatura di tre coniche che in M si toccano, e se la prima è circoscritta, la seconda inscritta, la terza conjugata ad un dato triangolo, C'' è il simmetrico, rispetto ad M , del punto medio di MC' , come C è il simmetrico del punto medio di MC'' .

18. **Curve anarmoniche.** Così, seguendo Halphen, si chiamano le curve per le quali è costante il rapporto anarmonico della quaterna co-

stituita da un punto M e dai punti d'incontro della tangente in M con tre rette fisse. Se queste, che si prendono come lati del triangolo fondamentale, determinano sulla tangente in M , a partire da M , i segmenti t_1, t_2, t_3 , si pone il problema in equazione scrivendo

$$c_1 t_3 t_2 + c_2 t_3 t_1 + c_3 t_1 t_2 = 0, \quad (45)$$

dove c_1, c_2, c_3 sono tre costanti, la cui somma è nulla: il rapporto anarmonico, come si sa, ha uno dei valori

$$-\frac{c_2}{c_3}, -\frac{c_3}{c_1}, -\frac{c_1}{c_2}, -\frac{c_3}{c_2}, -\frac{c_1}{c_3}, -\frac{c_2}{c_1}.$$

Intanto si calcolano facilmente le lunghezze t , e si trova

$$t_1 = -\frac{a^2 \mu_1}{y_2 - y_3}, \quad t_2 = -\frac{a^2 \mu_2}{y_3 - y_1}, \quad t_3 = -\frac{a^2 \mu_3}{y_1 - y_2},$$

dimodochè la (45) diventa

$$\frac{c_1}{\mu_1} (y_2 - y_3) + \frac{c_2}{\mu_2} (y_3 - y_1) + \frac{c_3}{\mu_3} (y_1 - y_2) = 0, \quad (46)$$

cioè, in virtù delle (27),

$$\sum_i c_i \frac{d}{ds} \log \mu_i = 0.$$

Questa, integrata, dà l'equazione baricentrica delle curve anarmoniche:

$$\mu_1^{c_1} \mu_2^{c_2} \mu_3^{c_3} = \text{costante}. \quad (47)$$

19. Il sistema che la (46) forma con $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ dà

$$\frac{c_1}{\mu_1 y_1} = \frac{c_2}{\mu_2 y_2} = \frac{c_3}{\mu_3 y_3}; \quad (48)$$

poi

$$c_1 \cot \theta_1 + c_2 \cot \theta_2 + c_3 \cot \theta_3 = 0.$$

In tal modo si trova la proprietà correlativa di quella che si è data come definizione, cioè: è costante il rapporto anarmonico della quaterna costituita da qualunque tangente e dalle rette che ne congiungono il punto di contatto a tre punti fissi. Così noi sappiamo costruire la tangente in ogni punto. Per costruire il centro di curvatura vogliamo prima dimostrare che le curve anarmoniche sono un caso limite delle curve triangolari simmetriche. Quando è nulla la somma delle c , l'equazione (41), dopo aver sostituito al secondo membro il prodotto di n per una costante, si può scrivere così:

$$\sum_i c_i \frac{\mu_i^n - 1}{n} = \text{costante}.$$

Ora, poichè

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\mu^n - 1}{n} = \log \mu,$$

si ritrova, per n tendente a zero, l'equazione (47). Ciò premesso, per $n=2$ ed $n'=0$, il teorema di Jamet dà $\rho=-\rho'$, vale a dire che il centro di curvatura d'una curva anarmonica, in un punto M , è simmetrico, rispetto ad M , del centro di curvatura di quella, fra le coniche conjugate al triangolo fondamentale, che tocca in M la curva considerata.

20. **Esempio.** a) Un interessante esempio di linea anarmonica ci è offerto dalla curva potenziale d'un triangolo, cioè dal luogo dei punti M che hanno le coordinate baricentriche proporzionali ad una stessa potenza n dei corrispondenti lati. Tra questi punti sono sempre (§ 7, 10) il baricentro del triangolo ($n=0$), il centro del circolo inscritto ($n=1$), il punto di Lemoine ($n=2$), ecc. Per fissare le idee supporremo costantemente $a_1 > a_2 > a_3$, e per brevità porremo

$$c_1 = \log \frac{a_2}{a_3}, \quad c_2 = \log \frac{a_3}{a_1}, \quad c_3 = \log \frac{a_1}{a_2},$$

osservando che $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Ciò premesso, dalla definizione

$$\frac{\mu_1}{a_1^n} = \frac{\mu_2}{a_2^n} = \frac{\mu_3}{a_3^n} = \frac{1}{a_1^n + a_2^n + a_3^n} \quad (49)$$

risulta subito che il luogo considerato è una curva anarmonica, giacchè si ha $\mu_1^c \mu_2^c \mu_3^c = 1$. Intanto le formole (49) mostrano che, per n crescente all'infinito, μ_1 tende all'unità, μ_2 e μ_3 a zero. Invece per n tendente a $-\infty$ è μ_3 che tende all'unità, mentre μ_2 e μ_1 tendono a zero. Dunque della curva potenziale fanno parte anche i vertici A_1 ed A_3 , opposti al massimo ed al minimo lato. Come si comporta la curva nel dominio di tali punti? Quando M tende ad A_1 , la retta MA_1 tende a confondersi con la tangente in A_1 , e però altrettanto deve fare MA_2 o MA_3 affinché il rapporto anarmonico delle quattro rette conservi il suo valore. Dunque la curva deve, nel vertice A_1 , toccare uno dei lati; ma, per rispondere con precisione alla questione proposta, bisogna ricorrere alle formole (48), che nel caso attuale diventano

$$\frac{y_1}{c_1 a_1^{-n}} = \frac{y_2}{c_2 a_2^{-n}} = \frac{y_3}{c_3 a_3^{-n}}, \quad (50)$$

e danno subito, successivamente,

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{c_2}{c_3} \left(\frac{a_3}{a_2} \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2}{y_3} = 0.$$

Ora, poichè y_3 non può superare a_2 , dev'essere $\lim y_2 = 0$, cioè la tangente in A_1 è $A_1 A_2$. In modo simile si dimostra che la tangente in A_3 è $A_3 A_2$. Adunque negli estremi del lato medio la curva tocca gli altri lati. Ne segue che, per n infinito, il limite di y_3 è la distanza di A_3 al lato opposto, come per n tendente a $-\infty$ il limite di y_1 è la distanza di A_1 al lato opposto, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_3 = \frac{a^3}{a_3}, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} y_1 = \frac{a^3}{a_1}.$$

Ora, adoperando le formole (50), si trova, per n crescente all'infinito,

$$\lim \left(\frac{a_1}{a_3} \right)^n y_1 = \frac{a^3 c_1}{a_2 c_3}, \quad \lim \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^n y_2 = \frac{a^2 c_2}{a_2 c_3}, \quad \lim \left(\frac{a_1 a_2}{a_3^2} \right)^n y_1 y_2 y_3 = \frac{a^6 c_1 c_2}{a_3^3 c_3}.$$

Similmente dalle (49) si deduce

$$\lim \mu_1 = \lim \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \mu_2 = \lim \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^n \mu_3 = 1 \quad , \quad \lim \left(\frac{a_1^3}{a_2 a_3}\right)^n \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1 .$$

D'altra parte, a prescindere dal segno, la formola (44) dà, per qualunque curva anarmonica,

$$\rho = a^4 \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{y_1 y_2 y_3} ;$$

quindi, in virtù dei precedenti risultati,

$$\lim \left(\frac{a_1 a_3}{a_2^3}\right)^n \rho = \frac{a_3^3 c_3^2}{a^3 c_1 c_2} . \quad (51)$$

Dunque, in generale, nel vertice A_1 la curvatura è nulla o infinita: nulla se $a_2^2 > a_1 a_3$, infinita se $a_2^2 < a_1 a_3$. Si dimostrerebbe analogamente che in A_3 la curvatura è infinita o nulla, rispettivamente, nelle medesime circostanze. Fanno eccezione i soli triangoli che hanno i lati in progressione geometrica. Per essi è $a_2^2 = a_1 a_3$, $c_1 = c_3 = -1/2 c_2$. Dalla precedente discussione risulta che il raggio di curvatura negli estremi del lato medio prende valori proporzionali ai cubi dei lati opposti, ed è poi facile dimostrare che il raggio stesso diventa proporzionale al cubo del lato medio nel baricentro, dove si ha

$$\rho = \frac{a_3^3}{2a^3} = \frac{a_1 a_2 a_3}{2a^3} ,$$

vale a dire che, nel baricentro, il circolo osculatore diventa uguale al circolo circoscritto al triangolo. Del resto nel caso particolare considerato la curva potenziale è una conica, perchè i valori trovati per le c riducono l'equazione baricentrica alla forma $\mu_3^2 = \mu_1 \mu_2$.

b) La curva potenziale può essere prolungata fuori del triangolo attribuendo valori immaginari ad n . Si cambi n in $n + m\sqrt{-1}$; si rappresenti con θ_i , evidentemente uguale ad $m \log a_i$, l'argomento di $a_i^{m\sqrt{-1}}$; con r e θ il modulo e l'argomento della somma $a_1^n + a_2^n + a_3^n$, dopo il cambiamento di n ; e si osservi che le (49) danno $r\mu_i = a_i^n e^{(\theta_i - \theta)\sqrt{-1}}$. Affinchè il punto (μ_1, μ_2, μ_3) sia reale occorre che $\theta_i - \theta$ sia un multiplo di π . Posto $\theta_i - \theta = m_i \pi$, si ha $r\mu_i = (-1)^{m_i} a_i^n$; quindi

$$\frac{\mu_1}{(-1)^{m_1} a_1^n} = \frac{\mu_2}{(-1)^{m_2} a_2^n} = \frac{\mu_3}{(-1)^{m_3} a_3^n} = \frac{1}{(-1)^{m_1} a_1^n + (-1)^{m_2} a_2^n + (-1)^{m_3} a_3^n} .$$

Si può sempre supporre che tutti i numeri m_i sono pari, o che un solo è dispari. Nella prima ipotesi si ricade sul punto M , definito dalle (49); nella seconda si ha un nuovo punto M' , che sta in una corrispondenza semplice con M : se il numero dispari è m_1 , il segmento MM' è diviso armonicamente dal vertice A_1 , e dal lato opposto. Come si determina ν ? Osserviamo che

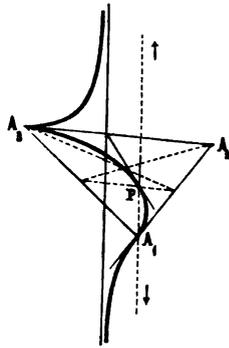
$$m c_1 = \theta_2 - \theta_3 = (m_2 - m_3)\pi , \quad \text{ecc.}$$

Bisogna dunque, innanzi tutto, che i mutui rapporti dei numeri c siano razionali. Se ciò ha luogo, si possono trovare tre numeri interi e_1, e_2, e_3 , primi fra loro, tali

che $c_i = e_i c$; e fra i lati del triangolo sussiste allora una relazione della forma

$$a_1^{e_1} a_3^{e_3} = a_2^{e_1 + e_3} . \quad (52)$$

Siccome i numeri e_1, e_2, e_3 sono proporzionali ad $m_2 - m_3, m_3 - m_1, m_1 - m_2$, è chiaro che un solo di essi è pari, ed è e_2 . Ne segue che, data la relazione (52), è noto il numero ν , perchè si ha $\nu = 2$ se e_1 ed e_3 sono dispari; $\nu = 1$ se e_1 è pari ed e_3 dispari; $\nu = 3$ se e_1 è dispari ed e_3 pari. Allorchè dunque la determinazione dei numeri e è possibile, la curva ammette rami (M'), esterni al triangolo, i quali si deducono dal ramo interno (M) mediante una trasformazione omologica armonica, col polo nel vertice A_2 , e l'asse nel lato opposto. Evidentemente per $\nu = 2$ si ottiene un sol ramo (M'), che insieme ad (M) costituisce una specie di ovale. Ben diversa è la forma della curva quando $\nu = 1$ o $\nu = 3$: sia, per fissare le idee, $\nu = 1$. La retta che congiunge i punti medii dei lati $A_1 A_2, A_1 A_3$, incontra (M) in un punto P ; ed il punto P' , corrispondente a P , sta all'infinito su $A_1 P$. La tangente in P si trasforma nella tangente in P' , cioè in un assintoto, che si costruisce facilmente conducendo dal punto d'incontro della tangente in P con $A_2 A_3$, asse di omologia,



la parallela a PA_1 . Gli archi PA_2 e PA_1 si trasformano evidentemente in due rami che si estendono all'infinito, assintoticamente alla retta testè costruita, e toccano il ramo interno in A_2 ed A_1 , rispettivamente, dimodochè in A_2 si ha una cuspidè ed in A_1 un flesso, senza che la curvatura sia necessariamente infinita nel primo punto, e nulla nel secondo. Del resto, più precise informazioni sul contegno della curva negli estremi del lato medio si attingono senza difficoltà dalle formole (32) e (51). La prima di queste conduce a scrivere $s = e^{-nc_3}$ nel dominio di A_1 , ed $s = e^{nc_1}$ nel dominio di A_3 , mentre la (51) si pone facilmente sotto la forma assintotica $\rho = ke^{n(c_1 - c_3)}$. Ne segue che nel

dominio di A_1 la curva si comporta come se la sua equazione intrinseca fosse

$$\rho = ks^{1 - \frac{c_1}{c_3}}, \text{ e nel dominio di } A_3 \text{ come se l'equazione fosse } \rho = ks^{1 - \frac{c_3}{c_1}}.$$

Ed ora basta ricordarsi delle cose dette nel primo capitolo (§ 11, e) per completare la discussione. Adunque, riassumendo, concludiamo che la curva potenziale d'un triangolo può avere tre forme ben differenti, che dipendono dalla relazione (52). Se questa non è verificata da alcuna coppia di numeri interi e_1 ed e_3 , la curva, tutta interna al triangolo, si ferma bruscamente negli estremi del lato medio. Se fra i lati si ha una relazione (52), con e_1 ed e_3 dispari, la potenziale è una curva chiusa. Finalmente, quando e_1 o e_3 è pari, la curva è aperta e consta di due rami, che partono da una cuspidè e si estendono all'infinito, assintoticamente ad una stessa retta. Un ramo è tutto esterno; l'altro, prima interno, s'infilette nel diventare esterno al triangolo. Trascendente nel primo caso, la curva potenziale è algebrica, di grado pari o di grado dispari, negli altri due casi.

VIII. SISTEMI DI CURVE PIANE.

1. Consideriamo una funzione continua dei punti d'un piano, ossia una variabile u che prenda un valore prescritto in ciascun punto M , e varii infinitamente poco quando M subisce, nel piano, uno spostamento infinitesimo. Se i valori che si attribuiscono ad u son tutti reali, il loro numero è semplicemente infinito, mentre è doppia l'infinità dei punti del piano. Imporre ad u un valore costante equivale dunque a segnare nel piano una linea; e cambiare il valore stesso significa passare da una linea ad un'altra. Ne segue che ogni funzione reale dei punti d'un piano chiude in sè la rappresentazione analitica d'un sistema semplicemente infinito di curve, le cui proprietà si ottengono, per conseguenza, interpretando geometricamente le proprietà della funzione. Importa osservare che le infinite funzioni di u non definiscono nuovi sistemi di curve: esse rappresentano tutte l'unico sistema definito dalla stessa u , e fra breve si vedrà che non vi sono altre funzioni atte a rappresentare il detto sistema.

2. Se uno spostamento ds del punto M produce nella funzione u l'incremento du , il rapporto $du:ds$ si chiama *quoziente differenziale* di u nella direzione dello spostamento, e si rappresenta con $\frac{\partial u}{\partial s}$ quando si riferisce ad una particolare direzione, che si vuol distinguere dalle altre. Una funzione ha dunque infiniti quozienti differenziali in ogni punto; ma essi dipendono in modo assai semplice dai quozienti relativi a due direzioni ortogonali qualunque, o dall'unico quoziente relativo ad una certa direzione. Infatti, sia M'' la proiezione dell'estremo M' del segmento $MM'=ds$ sopra una retta che passa per M , e siano ds_1 e ds_2 le lunghezze dei segmenti MM'' , $M''M'$, dimodochè

$$\frac{ds_1}{\cos \omega} = \frac{ds_2}{\sin \omega} = ds .$$

Quando si passa da M ad M'' la funzione prende il valore $u + \frac{\partial u}{\partial s_1} ds_1$; poi questo, nel passare da M'' ad M' , subisce un incremento che si può ritenere uguale a $\frac{\partial u}{\partial s_2} ds_2$, con $\frac{\partial u}{\partial s_2}$ calcolato in M , qualora si trascurino infinitesimi superiori. Ora, essendo $u + du$ il valore della funzione in M' , si vede che

$$du = \frac{\partial u}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial u}{\partial s_2} ds_2 ;$$

quindi

$$\frac{du}{ds} = \cos \omega \frac{\partial u}{\partial s_1} + \sin \omega \frac{\partial u}{\partial s_2} . \quad (1)$$

Poniamo, per brevità,

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial s_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s_2} \right)^2,$$

e consideriamo la direzione MN per cui si ha

$$\cos \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_1}, \quad \text{sen } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_2}. \quad (2)$$

In questa direzione la formola (1) dà $\sqrt{\Delta u}$ come valore del quoziente differenziale; poi la stessa (1) diventa, in virtù delle (2),

$$\frac{du}{ds} = \sqrt{\Delta u} \cdot \cos(\omega - \omega_0),$$

e così si vede che *la direzione MN è quella della più rapida variazione di u*. Invece nella direzione MT, perpendicolare ad MN, il quoziente differenziale è nullo, cioè *la funzione tende a rimanere costante*. Dunque MT è la tangente, e per conseguenza MN è la normale a quella curva del sistema, lungo la quale *u* conserva il valore che ha in M.

3. Primo parametro differenziale. Si chiama *parametro differenziale primo* d'una funzione *u*, in un punto, il quadrato del massimo quoziente differenziale, cioè Δu . È questo un invariante, perchè ha (per definizione) un significato indipendente da qualunque sistema di riferimento. In generale la funzione Δu definisce un nuovo sistema di curve, che coincide col sistema definito dalla *u* quando questo è costituito da curve parallele. Infatti, fissati per *u* due valori infinitamente vicini, *u* ed *u* + *du*, che definiscono due curve, il segmento staccato dalla seconda curva sulla normale alla prima, a partire dal punto d'incidenza, è $ds = du : \sqrt{\Delta u}$. Ora, perchè *ds* sia costante lungo la prima curva, occorre e basta che non varii quando non varia *u*, cioè che Δu dipenda da *u* soltanto. Dunque, *perchè il sistema definito dalla funzione u sia costituito da curve parallele è necessario e sufficiente che Δu sia funzione della sola u*.

4. Il parametro differenziale primo si può considerare come un caso particolare del *parametro differenziale misto* di due funzioni:

$$\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial s_1} \frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{\partial u}{\partial s_2} \frac{\partial v}{\partial s_2}.$$

Anche questo è un invariante. Infatti, se si scrivono le formole (2) per le normali alle due curve

$$u = \text{costante} \quad , \quad v = \text{costante} \quad ,$$

in un punto comune alle curve stesse, si trova subito che il loro angolo, ossia l'angolo ψ delle due curve, è dato dalla formola

$$\cos \psi = \frac{\Delta(u, v)}{\sqrt{\Delta u \cdot \Delta v}}.$$

Questa mette in evidenza il significato invariantivo di $\Delta(u, v)$, ed inoltre mostra che l'annullamento del parametro differenziale misto di due funzioni è necessario e sufficiente per l'ortogonalità delle curve rappresentate dalle funzioni stesse. Se poi si osserva che si può anche scrivere

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{1}{\sqrt{\Delta u \cdot \Delta v}} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s_1} & \frac{\partial u}{\partial s_2} \\ \frac{\partial v}{\partial s_1} & \frac{\partial v}{\partial s_2} \end{vmatrix},$$

e che per l'annullamento del secondo membro occorre e basta che v sia funzione di u , si vede che questa è anche la condizione sufficiente (cfr. § 1) e necessaria perchè le funzioni u e v rappresentino lo stesso sistema di curve.

5. Secondo parametro differenziale. L'operazione

$$\frac{d}{ds} = \cos \omega \frac{\partial}{\partial s_1} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial}{\partial s_2},$$

che fornisce il quoziente differenziale in una direzione qualunque, immaginiamola ripetuta nella stessa direzione, *supposta invariabile*: sia

$$\frac{d^2}{ds^2} = \left(\cos \omega \frac{\partial}{\partial s_1} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial}{\partial s_2} \right) \left(\cos \omega \frac{\partial}{\partial s_1} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial}{\partial s_2} \right).$$

Posto, per brevità,

$$\frac{\partial \omega}{\partial s_1} = \mathcal{G}_1, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s_2} = -\mathcal{G}_2, \quad (3)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} &= \cos^2 \omega \left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \mathcal{G}_1 \frac{\partial}{\partial s_2} \right) + \operatorname{sen}^2 \omega \left(\frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + \mathcal{G}_2 \frac{\partial}{\partial s_1} \right) \\ &+ \operatorname{sen} \omega \cos \omega \left(\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} - \mathcal{G}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} - \mathcal{G}_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \right). \end{aligned}$$

Se questa operazione si applica anche nella direzione definita dall'angolo $\omega + \frac{1}{2}\pi$, e se poi si fa la somma dei due risultati, si riconosce subito che la somma dei secondi quozienti differenziali in due direzioni (fisse nel piano) resta costante, in un punto, quando le direzioni variano conservandosi ortogonali. È questa somma che si chiama *parametro differenziale secondo* della funzione considerata u , e si rappresenta con $\Delta^2 u$. Adunque si ha

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + \mathcal{G}_1 \frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2 \frac{\partial}{\partial s_1},$$

ovvero

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) \frac{\partial}{\partial s_1} + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) \frac{\partial}{\partial s_2}. \quad (4)$$

Si chiamano poi *funzioni armoniche* quelle funzioni che hanno costantemente uguale a zero il parametro differenziale secondo.

6. Sistemi isotermi. Si dice *isotermo* ogni sistema di curve, definito da una funzione armonica, ed a questa funzione si dà il nome di *parametro isometrico* del sistema. Come si fa per riconoscere se il sistema definito da una funzione u è isotermo? Se non è $\Delta^2 u = 0$, ciò non vuol dire che il sistema non è isotermo, ma solo che u non può esserne il parametro isometrico. Tale parametro dovrà tuttavia, in virtù dell'osservazione finale del § 4, essere una funzione di u . Ora, per applicare l'operazione (4) ad $F(u)$, si osservi che

$$\frac{dF}{ds} = F' \frac{du}{ds} \quad , \quad \frac{d^2 F}{ds^2} = F' \frac{d^2 u}{ds^2} + F'' \left(\frac{du}{ds} \right)^2 ;$$

quindi

$$\Delta^2 F = F' \Delta^2 u + F'' \Delta u . \quad (5)$$

Se il sistema è isotermo, dovrà esistere una funzione F , tale che $\Delta^2 F$ sia nullo, e però si avrà

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta u} = - \frac{F''(u)}{F'(u)} ,$$

cioè il rapporto dei parametri differenziali sarà funzione di u soltanto. Inversamente, se avviene che il detto rapporto si trovi uguale ad una funzione $f(u)$, si ottiene, sostituendo $f(u)$ al primo membro, nella precedente uguaglianza, ed integrando,

$$F(u) = \int e^{-\int f(u) du} . du .$$

Evidentemente, se immaginiamo che questo valore di F si sostituisca in (5), vediamo che dovrà risultare $\Delta^2 F = 0$, e però il sistema è isotermo, ed ammette F come parametro isometrico. Adunque, *perchè il sistema di curve, definito dalla funzione u , sia isotermo, occorre e basta che il rapporto dei parametri differenziali di u sia funzione della sola u .*

7. Coordinate curvilinee. Ora consideriamo due sistemi di curve, definiti dalle funzioni q_1 e q_2 . Se queste non hanno fra loro alcun legame, se cioè (§ 4) i corrispondenti sistemi non coincidono, il numero delle coppie di valori di q_1 e q_2 , è doppiamente infinito come il numero dei punti del piano, e ciascuno di questi, M , si può considerare come rappresentato dalla coppia dei valori (*coordinate curvilinee*) di q_1 e q_2 , che nei relativi sistemi caratterizzano quelle curve che passano per M . Poco importa se ad una coppia (q_1 , q_2) corrispondono altri punti, o non ne corrisponde alcuno, e se ad uno o più punti non corrispondono valori di q_1 e q_2 ; noi supporremo tuttavia (ma solo perchè le nostre considerazioni riescano più chiare e più precise) che i punti del piano e le coppie (q_1 , q_2) siano tra loro in corrispondenza univoca. Così per ogni punto M potremo pensare che passino due sole curve (*linee coordinate*), una di ciascun sistema; e chiameremo linea q_1 quella che appartiene al sistema definito dalla funzione q_2 , e linea q_2 l'altra, diguisachè *linea q_i* sarà sempre quella *lungo la quale varia la sola q_i* . Se $\Delta(q_1, q_2) = 0$, i due sistemi sono ortogonali, ed è questa l'ipotesi che noi sempre faremo d'ora innanzi. Con-

verremo inoltre di dirigere la tangente a ciascuna linea q_i e di contare l'arco s_i nel senso in cui cresce q_i . Dirigendo poi la normale a q_1 , nel senso della tangente a q_2 , dovremo invece considerare come *opposte* le direzioni della normale a q_2 e della tangente a q_1 , affinché si possano portare a coincidere le direzioni positive della tangente e della normale a q_1 con quelle relative a q_2 . Ciò premesso, per le cose dette nel § 3, il segmento compreso fra due linee q_2 infinitamente vicine è $-ds_1 = dq_1 \cdot \sqrt{\Delta q_1}$, e noi per brevità lo rappresenteremo con $Q_1 dq_1$. Similmente, fra due linee q_1 , infinitamente vicine, è compreso un segmento $ds_2 = Q_2 dq_2$ della linea q_2 , uguale a $dq_2 \cdot \sqrt{\Delta q_2}$, dimostrandosi che si ha, per la definizione stessa,

$$\sqrt{\Delta q_1} = -\frac{1}{Q_1}, \quad \sqrt{\Delta q_2} = \frac{1}{Q_2}, \quad (6)$$

e le Q sono, per le convenzioni fatte in principio, suscettibili di soli valori *positivi*. Qui importa osservare che il quadrato dell'arco elementare $ds = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2}$ è dato dalla formola

$$ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2;$$

e poichè a ciascuna q_i si può sostituire una funzione di q_i , è chiaro che ciascuna Q_i si può moltiplicare per una funzione arbitraria di q_i . Evidentemente

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1} = \frac{1}{Q_1}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial s_2} = \frac{1}{Q_2}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial s_2} = \frac{\partial q_2}{\partial s_1} = 0. \quad (7)$$

Q_1 e Q_2 sono, come q_1 e q_2 , funzioni del punto M: esse sono dunque *funzioni delle variabili indipendenti* q_1 e q_2 . Altrettanto si può dire di qualunque funzione dei punti del piano. Le derivazioni parziali rispetto alle q sono poi legate in modo semplice alle operazioni che forniscono i quozienti differenziali definiti nel § 2, poichè si ha

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{1}{Q_1} \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{Q_2} \frac{\partial}{\partial q_2}. \quad (8)$$

Adunque i predetti quozienti *non si possono considerare come vere e proprie derivate* se non quando Q_1 è funzione di q_1 soltanto, e Q_2 di q_2 . Presto vedremo che ciò accade solo quando tutte le linee coordinate sono rette (*coordinate cartesiane*).

8. Formole fondamentali. Prendiamo come asse x la tangente in M (origine mobile) alla linea q_1 , e come asse y la tangente alla linea q_2 (normale alla q_1). Le coordinate cartesiane d'un punto fisso P debbono soddisfare, rispetto alla prima linea, alle condizioni (II, 1) d'immobilità

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = \frac{y}{\rho_1} - 1; \quad \frac{\partial y}{\partial s_1} = -\frac{x}{\rho_1}.$$

Rispetto alla q_2 le coordinate x e y di P sono y e $-x$, e però le condizioni

d'immobilità diventano

$$\frac{\partial y}{\partial s_2} = -\frac{x}{\rho_2} - 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} = \frac{y}{\rho_2}.$$

Osserviamo intanto che la funzione ω , considerata nel § 5, differisce solo nel segno dalla funzione costantemente rappresentata con φ nel primo capitolo, e però si ha

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = -\frac{\partial \omega}{\partial s_1} = -\mathcal{Q}_1, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = -\frac{\partial \omega}{\partial s_2} = \mathcal{Q}_2.$$

Dopo ciò si vede che le condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (x, y) sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial s_1} = -\mathcal{Q}_1 y - 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s_1} = \mathcal{Q}_1 x, \\ \frac{\partial y}{\partial s_2} = -\mathcal{Q}_2 x - 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} = \mathcal{Q}_2 y. \end{array} \right. \quad (9)$$

Se poi si vogliono le variazioni delle coordinate d'un punto P, quando l'origine passa dalla posizione M ad un'altra M', in una direzione che fa un angolo qualunque ω con l'asse x , è chiaro che si ha

$$\begin{aligned} \frac{\delta x}{\delta s} &= \left(\frac{\partial x}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_1 y + 1 \right) \cos \omega + \left(\frac{\partial x}{\partial s_2} - \mathcal{Q}_2 y \right) \sin \omega, \\ \frac{\delta y}{\delta s} &= \left(\frac{\partial y}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_2 x + 1 \right) \sin \omega + \left(\frac{\partial y}{\partial s_1} - \mathcal{Q}_1 x \right) \cos \omega. \end{aligned}$$

Son queste le *formole fondamentali* per l'analisi intrinseca delle coppie di sistemi ortogonali di curve piane.

9. Condizioni d'integrabilità. Date le funzioni u e v proponiamoci di trovare la *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza d'una funzione f , tale che sia*

$$u = \frac{\partial f}{\partial s_1}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial s_2}. \quad (10)$$

Per le (8) ciò equivale a chiedere la condizione perchè $Q_1 u$ e $Q_2 v$ siano le derivate parziali prime d'una funzione $f(q_1, q_2)$, ed è noto che tale condizione è

$$\frac{\partial Q_2 v}{\partial q_1} = \frac{\partial Q_1 u}{\partial q_2}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{Q_2} \frac{\partial Q_2 v}{\partial s_1} = \frac{1}{Q_1} \frac{\partial Q_1 u}{\partial s_2},$$

cioè, sviluppando,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} - \frac{\partial v}{\partial s_1} = v \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} - u \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2}.$$

Se in questa eguaglianza si sostituiscono i valori (10), si vede che, qualunque sia f , dev'essere soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} = \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} - \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1}. \quad (11)$$

Questa si applichi alla funzione x , tenendo presenti le (9). Prima si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2} &= -\frac{\partial \mathcal{C}_1 y}{\partial s_2} = -\frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial s_2} y + \mathcal{C}_1 (\mathcal{C}_2 x + 1) , \\ \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} &= \frac{\partial \mathcal{C}_2 y}{\partial s_1} = \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial s_1} y + \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1 x ; \end{aligned}$$

quindi, per la (11),

$$\left(\frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial s_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} \right) y = \mathcal{C}_1 - \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} . \quad (12)$$

Operando analogamente sulla funzione y si trova

$$\left(\frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial s_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} \right) x = \mathcal{C}_2 - \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} . \quad (13)$$

Queste relazioni debbono aver luogo qualunque siano i valori di x e di y . Se, per esempio, si considera l'istante del passaggio di M per un dato punto fisso P , si ha $x=0, y=0$, e le formole (12) e (13) ci danno

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} , \quad \mathcal{C}_2 = \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} . \quad (14)$$

Dopo ciò la condizione d'integrabilità si può porre sotto la forma definitiva

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{C}_2 \right) v = \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{C}_1 \right) u ,$$

e la condizione (11) diventa

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{C}_2 \right) \frac{\partial}{\partial s_2} = \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{C}_1 \right) \frac{\partial}{\partial s_1} . \quad (15)$$

10. Relazione di Lamé. Le curvatures \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 non sono indipendenti l'una dall'altra. Portando infatti i valori (14) nelle uguaglianze (12) e (13), queste si riducono all'unica

$$\frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial s_1} + \mathcal{C}_1^2 + \mathcal{C}_2^2 = 0 , \quad (16)$$

che si chiama *relazione di Lamé*, ed esprime (come risulta da un facile calcolo) la *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di due funzioni x_1 ed x_2 di q_1 e q_2 , tali che $dx_1^2 + dx_2^2$ rappresenti il quadrato dell'arco elementare*. Posta sotto la forma

$$-\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{C}_2 \right) \mathcal{C}_2 = \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{C}_1 \right) \mathcal{C}_1 , \quad (17)$$

la relazione di Lamé ci dice subito che \mathcal{C}_1 e $-\mathcal{C}_2$ sono i quozienti differenziali d'una funzione ω , come già si sapeva per le (3). Alla (16) si può dare

un'altra forma, ponendovi per le \mathcal{Q}_i i valori (14). Se si osserva che

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2\right)u = \frac{1}{Q_1 Q_2} \frac{\partial Q_2 u}{\partial q_1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1\right)u = \frac{1}{Q_1 Q_2} \frac{\partial Q_1 u}{\partial q_2}, \quad (18)$$

la relazione (16), dopo essere stata messa sotto la forma (17), diventa

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{Q_1} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{Q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right) = 0.$$

È anche utile notare la forma (dovuta a Lamé) che prende, mercè le (18), l'operazione (4):

$$\Delta^2 = \frac{1}{Q_1 Q_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{Q_2}{Q_1} \frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{Q_1}{Q_2} \frac{\partial}{\partial q_2}\right) \right].$$

11. Per una funzione armonica u l'operazione (4) deve dare $\Delta^2 u = 0$, cioè dev'essere

$$-\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2\right) \frac{\partial u}{\partial s_1} = \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1\right) \frac{\partial u}{\partial s_2},$$

e però $\frac{\partial u}{\partial s_2}$ e $-\frac{\partial u}{\partial s_1}$ sono i quozienti differenziali d'una funzione v :

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = -\frac{\partial v}{\partial s_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial s_2} = \frac{\partial v}{\partial s_1}.$$

Intanto si noti che i sistemi definiti dalle funzioni u e v sono fra loro ortogonali, perchè $\Delta(u, v) = 0$. Ora, in virtù di (15),

$$\Delta^2 v = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2\right) \frac{\partial v}{\partial s_2} - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1\right) \frac{\partial v}{\partial s_1} = 0.$$

Dunque v è armonica, vale a dire che *quando, in una coppia di sistemi ortogonali di curve piane, un sistema è isoterma, anche l'altro è isoterma*. A questo teorema si giunge anche utilizzando la regola data nel § 6 per riconoscere se un sistema è isoterma. Si applichi infatti l'operazione (4) a q_1 e q_2 , tenendo presenti le (7). Si ottiene, facendo uso delle (18),

$$\Delta^2 q_1 = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2\right) \frac{1}{Q_1} = \frac{1}{Q_1 Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \frac{1}{Q_1}, \quad \Delta^2 q_2 = \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1\right) \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_1 Q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{1}{Q_2};$$

poi, ricordando le (6),

$$\frac{\Delta^2 q_1}{\Delta q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \log \frac{Q_2}{Q_1}, \quad \frac{\Delta^2 q_2}{\Delta q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} \log \frac{Q_1}{Q_2}, \quad (19)$$

e finalmente

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\Delta^2 q_1}{\Delta q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\Delta^2 q_2}{\Delta q_2} = 0.$$

Questa formola mostra chiaramente che la condizione enunciata in fine del § 6, quando è soddisfatta per uno dei sistemi, è soddisfatta anche per l'altro. Se poi per q_1 e q_2 si scelgono i parametri isometrici, dalle (19) risulta che il rapporto di Q_1 a Q_2 è costante, e che, viceversa, ciò non può accadere se non

quando q_1 e q_2 sono funzioni armoniche. Ne segue che le coppie ortogonali isoterme di curve piane sono caratterizzate dalla possibilità di rendere $Q_1 = Q_2$, giacchè si può sempre moltiplicare per una costante ogni funzione Q o q . Allora l'arco elementare è dato dalla formola

$$ds^2 = Q^2(dq_1^2 + dq_2^2),$$

e basta prendere $dq_1 = dq_2$ perchè sia $ds_1 = ds_2$ in ogni punto. Ciò si suole esprimere dicendo che *le curve di qualunque doppio sistema ortogonale isoterma dividono il piano in quadrati infinitesimi*.

12. Per assicurarsi che un doppio sistema di linee coordinate ortogonali è isoterma, basta vedere se uno dei sistemi è isoterma, e però si deve avere, applicando ad una delle (19) il criterio dimostrato nel § 6,

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} \log \frac{Q_1}{Q_2} = 0.$$

Con due integrazioni successive si riconosce che *il rapporto delle funzioni Q dev'essere uguale al prodotto d'una funzione della sola q_1 per una funzione della sola q_2* . È questa la proprietà caratteristica delle funzioni Q nei doppi sistemi isotermi. Per esprimerla nelle \mathcal{Q} osserviamo, ricordando le (14), che

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} \log \frac{Q_1}{Q_2} = Q_1 \frac{\partial Q_2 \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} - Q_2 \frac{\partial Q_1 \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} = Q_1 Q_2 \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \right).$$

Dunque, perchè le funzioni \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 (necessariamente vincolate dalla relazione di Lamé) definiscano un doppio sistema isoterma, occorre e basta che si abbia

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} = \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2}. \quad (20)$$

Ciò equivale a dire che la funzione ω , che compare nelle formole (3), è armonica, perchè si ha

$$\Delta^2 \omega = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2 \right) \mathcal{Q}_1 - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1 \right) \mathcal{Q}_2 = \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2}.$$

13. **Formola di Bonnet.** Serve questa formola a far conoscere, in ogni punto M , la curvatura di quella linea che, nel sistema definito da una funzione u , passa per M . L'inclinazione ω della tangente a tale curva, in M , si sa calcolare, come si è visto nel § 2, scrivendo

$$\cos \omega \frac{\partial u}{\partial s_1} + \sin \omega \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0,$$

d'onde si trae

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_2}, \quad \sin \omega = -\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_1}, \quad (21)$$

purchè si abbia cura di fissare i segni in modo che, tenendo presenti le formole (6) e (7), sia $\omega=0$ per $u=q_2$, ed $\omega=1/2\pi$ per $u=q_1$. Sia φ l'inclinazione della tangente alla linea q_1 sopra una retta fissa; saranno $\varphi+1/2\pi$ e $\varphi+\omega$ gli angoli analoghi per la linea q_2 e per la curva considerata. Dunque

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} = \frac{1}{\rho_1} = -\mathcal{G}_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} = \frac{1}{\rho_2} = \mathcal{G}_2, \quad \frac{d}{ds}(\varphi+\omega) = \frac{1}{\rho};$$

poi

$$\frac{1}{\rho} = -\mathcal{G}_1 \cos\omega + \mathcal{G}_2 \operatorname{sen}\omega + \frac{d\omega}{ds}. \quad (22)$$

D'altra parte si ha

$$\frac{d\omega}{ds} = \cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial s_1} + \operatorname{sen}\omega \frac{\partial\omega}{\partial s_2} = \frac{\partial}{\partial s_1} \operatorname{sen}\omega - \frac{\partial}{\partial s_2} \cos\omega.$$

Dunque

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) \operatorname{sen}\omega - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) \cos\omega.$$

Ora, sostituendo in questa uguaglianza i valori (21), si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} &= \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_1}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) \frac{\partial u}{\partial s_1} + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) \frac{\partial u}{\partial s_2} \right] + \frac{\partial u}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} + \frac{\partial u}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{1}{\sqrt{\Delta u}}, \end{aligned}$$

cioè, finalmente,

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta^2 u}{\sqrt{\Delta u}} + \Delta\left(u, \frac{1}{\sqrt{\Delta u}}\right).$$

Così è nota la curvatura in forma esplicitamente invariante.

14. **Esempi:** a) Si considerino le *trajettorie ad angolo costante* delle linee d'un sistema, cioè le curve che incontrano le dette linee, per esempio le linee q_1 , sotto l'angolo costante ω . Evidentemente per ogni punto M passano infinite trajettorie, ciascuna delle quali corrisponde ad un valore di ω . La formola (22) dà

$$\frac{1}{\rho} = -\mathcal{G}_1 \cos\omega + \mathcal{G}_2 \operatorname{sen}\omega,$$

e mostra che i centri di curvatura di tutte le trajettorie, in ciascun punto M , appartengono ad una retta, rappresentata dall'equazione

$$\mathcal{G}_2 x + \mathcal{G}_1 y + 1 = 0. \quad (23)$$

Sia φ l'angolo che la tangente ad una linea coordinata fa con una retta fissa, e si consideri il sistema definito dalla funzione φ , cioè quel sistema in cui ogni curva è tale che, da un punto all'altro, non varia la direzione delle tangenti alle linee coordinate. L'equazione della tangente ad una curva del sistema φ è $\mathcal{G}_1 x = \mathcal{G}_2 y$, e però la retta (23), corrispondente ad un dato punto M , è parallela alla normale a quella curva del sistema, che passa per M . Ne segue che tale curva *tocca nei loro punti d'inflessione le trajettorie ad angolo costante delle linee coordinate.*

Sono notevoli anche i sistemi definiti dalle funzioni \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 , dei quali fanno parte i luoghi dei flessi e delle cuspidi delle linee coordinate. Quando M si sposta in una direzione che fa l'angolo ω con l'asse x , si trova, applicando le formole (9) all'equazione (23), e ricordando la relazione di Lamé, che la retta (23) tocca il suo involuppo sulla retta

$$\left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \cos \omega - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \sin \omega\right)x = \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} \cos \omega - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1} \sin \omega\right)y. \quad (24)$$

Questa equazione è soddisfatta qualunque siano x ed y , per un certo valore di ω , solo quando è nullo il determinante funzionale delle \mathcal{Q} . Allora l'infinità doppia delle rette (23) si riduce ad una semplice infinità; ma bisogna osservare che ciò accade anche quando non esiste un sistema \mathcal{Q} , cioè quando, per essere \mathcal{Q}_1 o \mathcal{Q}_2 costante, uno dei sistemi fondamentali è costituito da circoli uguali o da rette. In questo caso le rette (23) sono evidentemente le normali alla curva che involuppa i circoli o le rette del sistema. Così possiamo spiegarci sotto un nuovo punto di vista le note costruzioni (I, 11, c; II, 13, c) del centro di curvatura della spirale logaritmica, delle sviluppanti della catenaria, ecc. Nel caso generale si deduce dalla (24) che le rette (23), quando M si sposta lungo una linea coordinata, toccano il loro involuppo sulla normale ad una curva \mathcal{Q} .

b) I circoli osculatori delle linee coordinate, in un punto M, sono rappresentati dalle equazioni

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{\mathcal{Q}_1}y = 0, \quad x^2 + y^2 + \frac{2}{\mathcal{Q}_2}x = 0.$$

Derivando la prima rispetto a q_2 , la seconda rispetto a q_1 , ed osservando le (9), si ottiene

$$\mathcal{Q}_2 x + \mathcal{Q}_1 y + 1 + y \frac{\partial}{\partial s_2} \log \mathcal{Q}_1 = 0, \quad \mathcal{Q}_2 x + \mathcal{Q}_1 y + 1 + x \frac{\partial}{\partial s_1} \log \mathcal{Q}_2 = 0. \quad (25)$$

Dunque ciascuna circonferenza tocca il suo involuppo sopra un diametro dell'altra. È poi facile riconoscere che, in virtù della relazione di Lamé, i due diametri sono perpendicolari, e che uno dei due involuppi è reale, l'altro immaginario. Ora proponiamoci di trovare la condizione che dev'essere soddisfatta affinché i circoli osculatori delle linee q_2 , lungo una linea q_1 , costituiscano un fascio. Per questo occorre, evidentemente, e basta che la retta rappresentata dalla seconda equazione (25) sia fissa nel piano. Intanto, se si deriva ancora la detta equazione rispetto a q_1 , tenendo conto delle (9), della relazione di Lamé, e della stessa equazione primitiva, si ottiene

$$x \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + 3\mathcal{Q}_1 \right) \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} = y \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1},$$

e però la condizione cercata è che \mathcal{Q}_1 sia indipendente da q_1 , cioè che ogni linea q_1 sia un circolo. Dunque i circoli osculatori delle traiettorie ortogonali di qualunque semplice infinità di circonferenze, lungo ciascuna di queste, formano un fascio. Questa è, del resto, un'immediata conseguenza del noto teorema: i circoli ortogonali a due circoli dati formano un fascio, il cui asse è il comune diametro dei due circoli. Basta considerare due circoli infinitamente vicini, in un dato sistema, per ritrovare il primo teorema, e per vedere inoltre che l'asse del fascio

dei cerchi osculatori è la tangente al luogo dei centri. Segue poi dal teorema stesso che ogni doppio sistema ortogonale di cerchi consta necessariamente di due fasci. Gli assi dei due fasci, cioè le rette rappresentate dalle equazioni (25), sono perpendicolari, e contengono i centri di tutti i cerchi: uno incontra le corrispondenti circonferenze in due punti reali A ed A', l'altro in due punti immaginari, ed eccezionalmente in due punti reali coincidenti. Con un calcolo facile si trova che, se 2a è la lunghezza del segmento AA', si ha

$$\frac{1}{a^2} = \mathcal{Q}_1^2 + \frac{\left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\right)^2}{\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1}} = -\mathcal{Q}_2^2 + \frac{\left(\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1}\right)^2}{\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1}}. \quad (26)$$

Invece la lunghezza del segmento staccato sull'altra retta dalle corrispondenti circonferenze è $2a\sqrt{-1}$.

c) Cerchiamo di studiar meglio i doppi sistemi ortogonali di cerchi, evidentemente caratterizzati dalle uguaglianze

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} = 0, \quad (27)$$

e per conseguenza *isotermi*, giacchè la condizione (20) è soddisfatta. I calcoli accennati nel precedente esempio si possono qui ripetere più speditamente, dopo avere osservato che, per la relazione di Lamé e la condizione (15), dalle (27) si deduce

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{Q}_1}{\partial s_1 \partial s_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{Q}_1}{\partial s_2 \partial s_1} = -\mathcal{Q}_2 \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2}, \quad \frac{1}{\mathcal{Q}_1} \frac{\partial^2 \mathcal{Q}_1}{\partial s_1^2} = \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1} - 2 \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{Q}_2}{\partial s_2 \partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{Q}_2}{\partial s_1 \partial s_2} = -\mathcal{Q}_1 \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1}, \quad \frac{1}{\mathcal{Q}_2} \frac{\partial^2 \mathcal{Q}_2}{\partial s_2^2} = \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} - 2 \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1}. \end{aligned}$$

Servendosi di queste relazioni si giunge più facilmente a stabilire che le rette (25) sono fisse nel piano. Ora vogliamo determinare le \mathcal{Q} , e per questo supporremo che q_1 e q_2 sono i parametri isometrici, e ricorderemo (§ 11) che si può sempre fare in modo che sia $Q_1 = Q_2$. Così le (14) danno

$$\mathcal{Q}_1 = -\frac{\partial}{\partial q_2} \frac{1}{Q}, \quad \mathcal{Q}_2 = -\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{1}{Q}, \quad (28)$$

e la relazione di Lamé diventa

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{d\mathcal{Q}_1}{dq_2} + \frac{d\mathcal{Q}_2}{dq_1} \right) + \mathcal{Q}_1^2 + \mathcal{Q}_2^2 = 0. \quad (29)$$

Col derivar questa rispetto a q_1 ed a q_2 si ottiene

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 \mathcal{Q}_2}{dq_1^2} = \mathcal{Q}_2 \left(\frac{d\mathcal{Q}_1}{dq_2} - \frac{d\mathcal{Q}_2}{dq_1} \right), \quad \frac{1}{Q} \frac{d^2 \mathcal{Q}_1}{dq_2^2} = \mathcal{Q}_1 \left(\frac{d\mathcal{Q}_2}{dq_1} - \frac{d\mathcal{Q}_1}{dq_2} \right),$$

poi

$$\frac{1}{\mathcal{Q}_1} \frac{d^2 \mathcal{Q}_1}{dq_2^2} + \frac{1}{\mathcal{Q}_2} \frac{d^2 \mathcal{Q}_2}{dq_1^2} = 0.$$

Siccome il primo termine è indipendente da q_1 , ed il secondo da q_2 , bisogna che tutti e due siano costanti, e si è in tal modo condotti a porre

$$\frac{d^2 \mathcal{C}_1}{dq_2^2} = -k^2 \mathcal{C}_1, \quad \frac{d^2 \mathcal{C}_2}{dq_1^2} = k^2 \mathcal{C}_2. \quad (30)$$

Se assumiamo come linee q_1 le circonferenze che passano per A ed A', la stessa retta AA' è una linea q_1 , che noi possiamo sempre immaginare rappresentata dall'equazione $q_2 = 0$. Allora per soddisfare alla prima equazione (30) bisogna prendere $\mathcal{C}_1 = \lambda \operatorname{sen} kq_2$. All'altra equazione si soddisfa solo prendendo

$$\mathcal{C}_2 = \mu e^{kq_1} + \mu' e^{-kq_1},$$

con μ e μ' costanti arbitrarie come λ . Intanto dalle (28) si trae, integrando,

$$\frac{k}{Q} = \lambda \cos kq_2 - (\mu e^{kq_1} - \mu' e^{-kq_1}) + \text{costante};$$

poi si trova, sostituendo in (29), che l'ultima costante è nulla, e che fra le altre intercede la relazione $\lambda^2 + 4\mu\mu' = 0$. Se una delle costanti μ o μ' è nulla, per esempio μ' , dev'essere anche $\lambda = 0$, e si ha $\mathcal{C}_1 = 0$, $\mathcal{C}_2 = \mu e^{kq_1}$. Allora le linee q_1 formano un fascio di rette, e le linee q_2 sono circonferenze concentriche. Se μ e μ' non sono nulle, sappiamo (cfr. II, 7, n) che si può sempre supporre $\mu = \pm \mu'$, e nel caso attuale è necessario che sia $\mu = -\mu' = \frac{1}{2}\lambda$. Quindi

$$\mathcal{C}_1 = \lambda \operatorname{sen} kq_2, \quad \mathcal{C}_2 = \frac{\lambda}{2} (e^{kq_1} - e^{-kq_1}). \quad (31)$$

Quale caso limite, per k tendente a zero, troviamo $\mathcal{C}_1 = q_2$, $\mathcal{C}_2 = q_1$, come, del resto, si può dedurre direttamente dalle (30) per $k = 0$. In questo caso la (26) mostra che a è nullo, e però i due sistemi sono composti dai cerchi che toccano due rette perpendicolari nel loro punto comune. Nel caso generale è sempre lecito prendere $k = 1$, e la sostituzione dei valori (31) in (26) dà $\lambda a = \pm 1$. Dunque

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\operatorname{sen} q_2}{a}, \quad \mathcal{C}_2 = \frac{e^{q_1} - e^{-q_1}}{2a}.$$

L'interpretazione geometrica della prima formola mostra che q_2 è l'angolo AMA'; poi la seconda conduce a riconoscere che q_1 è il logaritmo del rapporto MA':MA.

d) Qualunque curva piana dà origine ad un doppio sistema di curve quando ad ogni arco si fa corrispondere un punto del piano. Gli archi d'una curva sono infatti in numero doppiamente infinito, e ciascuno di essi è rappresentato dalla coppia dei valori ζ_1 e ζ_2 , che prende negli estremi la lunghezza dell'arco s , contata a partire da un'origine fissa. Un modo semplice di realizzare tale corrispondenza consiste nel prendere il baricentro G di ciascun arco A_1A_2 . Allora i due sistemi definiti dalle funzioni ζ costituiscono il sistema unico delle linee baricentriche (VI, 3) della curva data. Per ogni punto G passano due linee, cioè le due baricentriche che toccano la curva data negli estremi del corrispondente arco; e noi già sappiamo che le tangenti in G alle due linee sono appunto GA_1 e GA_2 . Per costruire un doppio sistema ortogonale di linee condurremo per l'origine G due assi ortogonali, orientandoli in modo che delle tre uguaglianze

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x ds = 0, \quad \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} y ds = 0, \quad \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} xy ds = 0, \quad (32)$$

sia vera anche la terza. I quozienti differenziali relativi ai nuovi assi si esprimono così:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_2}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial \zeta_2}. \quad (33)$$

Se poi si rappresenta con D il determinante funzionale delle ζ , necessariamente diverso da zero, si ha pure

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} \right). \quad (34)$$

Basta derivare le prime due relazioni (32) rispetto alle ζ , applicando le formole (34) e (9), per ottenere

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1} = \frac{D}{\sigma} y_2, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial s_2} = -\frac{D}{\sigma} x_2, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial s_1} = \frac{D}{\sigma} y_1, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial s_2} = -\frac{D}{\sigma} x_1,$$

dove x_i ed y_i sono le coordinate di A_i , e σ rappresenta la lunghezza dell'arco $A_1 A_2$. Dunque, rappresentando ancora con τ il doppio dell'area del triangolo $GA_2 A_1$, si ha

$$D = -\frac{D^2}{\sigma^2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{D^2}{\sigma^2} \tau,$$

e finalmente, poichè D non può essere sempre nullo, $\tau D = \sigma^2$. A questo risultato si perviene anche osservando che, se ψ è l'angolo delle due baricentriche che s'incrociano in G, e se r_i è la lunghezza del lato GA_i , si ha successivamente

$$\sqrt{\Delta \zeta_1} = \frac{D}{\sigma} r_2, \quad \sqrt{\Delta \zeta_2} = \frac{D}{\sigma} r_1, \quad \tau = r_1 r_2 \sin \psi = \frac{r_1 r_2 D}{\sqrt{\Delta \zeta_1 \cdot \Delta \zeta_2}} = \frac{\sigma^2}{D}.$$

Ciò premesso, le (33) e le (34) diventano

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\sigma}{\tau} \left(y_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = -\frac{\sigma}{\tau} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \right), \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} = -\frac{1}{\sigma} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial s_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{\sigma} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial s_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \right). \quad (36)$$

Fin qui non si è tenuto conto del particolare orientamento degli assi, definito dall'ultima eguaglianza (32). Ora, applicando le (36) e le (9), e ponendo

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (x^2 - y^2) ds = \kappa \sigma,$$

si trova

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} xy ds = -x_1 y_1 - \kappa (\mathcal{C}_1 x_1 - \mathcal{C}_2 y_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} xy ds = x_2 y_2 + \kappa (\mathcal{C}_1 r_2 - \mathcal{C}_2 y_2);$$

poi, per le (35),

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} xy ds = \frac{\sigma}{\tau} [x\tau \mathcal{G}_1 - y_1 y_2 (x_1 - x_2)] ,$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} xy ds = -\frac{\sigma}{\tau} [x\tau \mathcal{G}_2 - x_1 x_2 (y_1 - y_2)] .$$

Dunque

$$\mathcal{G}_1 = (x_1 - x_2) \frac{y_1 y_2}{x\tau} , \quad \mathcal{G}_2 = (y_1 - y_2) \frac{x_1 x_2}{x\tau} . \quad (37)$$

Intanto è utile trasformare le condizioni (9) in modo da farvi comparire le derivate relative alle ζ . Si trova facilmente, mercè le (36),

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta_1} = \left(1 - \frac{yy_1}{x}\right) \frac{\alpha_1}{\sigma} ; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \zeta_2} = -\left(1 - \frac{yy_2}{x}\right) \frac{\alpha_2}{\sigma}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta_1} = \left(1 + \frac{xx_1}{x}\right) \frac{y_1}{\sigma} , \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta_2} = -\left(1 + \frac{xx_2}{x}\right) \frac{y_2}{\sigma} .$$

Son queste le *condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto* (x, y) . Qui bisogna osservare che le formole di sinistra sono applicabili anche ad x_2, y_2 , perchè nella derivazione parziale rispetto a ζ_1 il punto A_2 resta immobile. Similmente sono applicabili ad x_1, y_1 le formole di destra. Se poi si vogliono le altre derivate, per esempio le derivate di x_1 ed y_1 rispetto a ζ_1 , bisogna tener conto dello spostamento di A_1 , ed aggiungere alle espressioni di $\frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1}$ e $\frac{\partial y_1}{\partial \zeta_1}$, ottenute applicando le formole di sinistra, i valori di $\frac{\delta x_1}{\partial \zeta_1}$ e $\frac{\delta y_1}{\partial \zeta_1}$, cioè il coseno ed il seno dell'inclinazione della tangente alla curva, in A_1 , sull'asse x .

e) La curva che dà origine ad una coppia baricentrica di sistemi di linee ortogonali appartiene ad uno di questi sistemi. È infatti evidente che, fissato per ζ_1 un valore qualunque s , se si fa poi tendere ζ_2 ad s , un asse tende a diventare tangente alla curva, l'altro normale. Scelto il primo come asse ω , si riconosce, tenendo presenti le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} , \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} ,$$

che per soddisfare alle formole precedentemente ottenute, con serie che procedano secondo le potenze di σ , si deve prendere

$$x_1 = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^3}{48\rho^2} + \frac{\sigma^4}{120} \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho^2} + \dots , \quad y_1 = \frac{\sigma^2}{12\rho} + \frac{\sigma^3}{30} \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} + \dots$$

$$x_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48\rho^2} - \frac{\sigma^4}{80} \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho^2} + \dots , \quad y_2 = \frac{\sigma^2}{12\rho} + \frac{\sigma^3}{20} \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} + \dots$$

È poi facile dedurne

$$\tau = \frac{\sigma^3}{12\rho} + \frac{\sigma^4}{24} \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} + \dots , \quad x = \frac{\sigma^2}{12} - \frac{\sigma^4}{180\rho^2} + \dots$$

Queste formole agevolano la discussione dei fatti geometrici del doppio sistema

nel dominio della curva considerata. In particolare per $\sigma=0$ le formole (37) diventano

$$\mathcal{G}_1 = -\frac{1}{\rho}, \quad \mathcal{G}_2 = -\frac{3}{5} \frac{d}{ds} \log \rho,$$

e mostrano che non ogni sistema doppio ortogonale si può considerare come baricentrico rispetto a qualche curva, perchè bisogna che lungo una delle linee che lo compongono, per esempio lungo una certa linea q_1 , la curvatura delle linee q_2 prenda i valori

$$\mathcal{G}_2 = \frac{3}{5} \frac{\partial}{\partial s_1} \log \mathcal{G}_1.$$

Del resto è chiaro geometricamente che i doppi sistemi baricentrici sono specialissimi. Così, per esempio, un doppio sistema di cerchi ortogonali non è, in generale, baricentrico, perchè tale potrebbe essere solo per una delle sue circonferenze, mentre è ovvio che il doppio sistema baricentrico d'una circonferenza è costituito dalle circonferenze concentriche e dal fascio dei comuni diametri.

IX. CURVE STORTE E SUPERFICIE RIGATE.

1. **Triedro fondamentale.** La *tangente* ad una curva qualunque dello spazio a tre dimensioni, in un dato punto M, si definisce (*cf.* I, 1) come per le curve piane. *Normali*, in M, sono le infinite perpendicolari elevate per M alla tangente, le quali stanno in un piano, che si chiama *piano normale*. Se, col tendere di M' ad M, la retta comune ai piani normali in M ed M' tende ad una posizione limite, in questa essa prende il nome di *asse polare*. Una delle infinite normali è parallela all'asse polare, un'altra gli è perpendicolare: la prima si chiama *binormale*, l'altra *normale principale*. Uno dei piani che passano per la tangente contiene anche la binormale, un altro contiene la normale principale: il primo si chiama *piano rettificante*, l'altro *piano osculatore*. Così in ogni punto d'una curva avremo da considerare un triedro trirettangolo, che ha come spigoli la tangente, la binormale, la normale principale, e come facce il piano normale, il piano osculatore, il piano rettificante. Siccome l'asse polare si può considerare come l'intersezione di due piani normali infinitamente vicini, si può anche dire che *la binormale è perpendicolare a due tangenti infinitamente vicine*. Con ciò si vuole soltanto esprimere brevemente che la binormale, in M, è la posizione limite della comune perpendicolare alle tangenti in M ed M', quando, fissato M, si fa tendere M' ad M.

2. **Curvature ed equazioni intrinseche.** Posta l'origine delle coordinate nel punto M, mobile lungo la curva, prenderemo costantemente

come asse x la tangente, come asse y la binormale, come asse z la normale principale. Consideriamo il triedro degli assi dopo che l'origine si è trasferita da M nella posizione infinitamente prossima M' . Per l'osservazione fatta in fine del precedente paragrafo è chiaro che si ha $\cos(y, x') = 0$. Ne segue che la tangente x' e la binormale y' si possono considerare come parallele ai piani sx e sy rispettivamente. Quindi, se $\delta\varphi$ è l'angolo di due tangenti infinitamente vicine, è $\cos(s, x') = d\varphi$; e se $\delta\psi$ è l'angolo di due binormali infinitamente vicine si ha $\cos(s, y') = d\psi$, a prescindere da infinitesimi superiori. I rapporti dei differenziali di φ e ψ a ds (cioè i limiti dei rapporti di $\delta\varphi$ e $\delta\psi$ alla lunghezza dell'arco MM' , quando M' tende ad M) misurano le curvature della linea considerata, nel punto M ; e si distingue la prima col nome di *flessione*, l'altra col nome di *torsione*. Poi, se si pone $ds = \rho d\varphi = r d\psi$, i numeri ρ ed r , inversi delle curvature, misurano due lunghezze, che si chiamano *raggio di flessione* e *raggio di torsione*. La flessione d'una curva storta consiste dunque, come per le curve piane, nel più o meno rapido allontanarsi della curva dalla tangente, e la torsione sta invece nel modo più o meno rapido con cui la curva tende a scostarsi dal piano osculatore. Evidentemente le curve piane sono caratterizzate dal fatto che la loro torsione è nulla. Ciò premesso, per completare il quadro dei coseni direttori degli assi di origine M' rispetto a quelli di origine M , vogliamo prima osservare che, se si prescinde da infinitesimi superiori, i coseni degli angoli (x, x') , ecc., si debbono ritenere uguali all'unità, perchè si ha, per esempio,

$$\cos(x, x') = \cos \delta\varphi = 1 - \frac{1}{2} (\delta\varphi)^2 + \dots; \text{ ecc.}$$

poi, per la perpendicolarità degli assi x' ed y' , x' e z' , y' e z' ,

$$\cos(x, y') = 0 \quad , \quad \cos(x, z') = -d\varphi \quad , \quad \cos(y, z') = -d\psi \quad ,$$

e si può quindi scrivere il quadro dei coseni direttori nel seguente modo:

	x	y	z	
x'	1	0	$d\varphi$	(1)
y'	0	1	$d\psi$	
z'	$-d\varphi$	$-d\psi$	1	

Questo quadro mostra che, per poter discutere la curva nel dominio di ciascun punto, basta conoscere le funzioni φ e ψ , basta cioè darsi ρ ed r in funzione di s . Le equazioni

$$f(s, \rho, r) = 0 \quad , \quad g(s, \rho, r) = 0 \quad ,$$

dalle quali si possono trarre, per una data curva, i valori delle curvature in ogni punto, si chiamano le *equazioni intrinseche* della curva. Presto vedremo che la loro conoscenza permette anche di determinare in modo unico la forma dell'intera curva, a prescindere dalla posizione che questa occupa nello spazio.

3. Formole fondamentali. Rispetto al triedro di origine M siano x, y, z (funzioni di s) le coordinate d'un punto P , generalmente mobile con M , e siano $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ le coordinate del punto P' , corrispondente ad M' sulla traiettoria che va descrivendo P . Le coordinate di P' rispetto agli assi di origine M' sono $x + dx, y + dy, z + dz$, e però, tenendo presente il quadro (1), e chiamando u, v, w le coordinate (infinitesime) di M' :

$$\begin{aligned} x + \delta x &= u + x + dx - (x + dz)d\varphi, \\ y + \delta y &= v + y + dy - (x + dz)d\psi, \\ z + \delta z &= w + (x + dx)d\varphi + (y + dy)d\psi + z + dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Noi vogliamo limitare il nostro studio a quelle curve, per le quali sia lecito asserire, come per le curve piane, che il limite del rapporto dell'arco MM' alla corda, quando M' tende ad M , è uguale all'unità. Siccome, per la definizione stessa della tangente, si ha

$$\lim \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = 1, \quad \lim \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = 0, \quad \lim \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = 0,$$

e d'altra parte l'ipotesi testè fatta si traduce in

$$\lim \frac{\delta s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = 1,$$

si ha pure

$$\lim \frac{u}{\delta s} = 1, \quad \lim \frac{v}{\delta s} = 0, \quad \lim \frac{w}{\delta s} = 0.$$

Possiamo pertanto nelle (2) sopprimere v e w , e sostituire ds ad u ; dividendole poi per ds si ottengono le *formole fondamentali*:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{z}{\rho} + 1, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{z}{r}, \quad \frac{\delta z}{ds} = \frac{dz}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}. \quad (3)$$

Le (2) sono applicabili anche ai coseni α, β, γ , che definiscono una direzione qualunque, purchè vi si sopprimano u, v, w . Ne segue che *per le direzioni* si ha

$$\frac{\delta \alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho}, \quad \frac{\delta \beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds} - \frac{\gamma}{r}, \quad \frac{\delta \gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{r}. \quad (4)$$

Cerchiamo finalmente le formole fondamentali relative alla retta. Per coordinate d'una linea retta possiamo assumere i suoi coseni direttori α, β, γ , e le quantità

$$\xi = \gamma y - \beta z, \quad \eta = \alpha z - \gamma x, \quad \zeta = \beta x - \alpha y, \quad (5)$$

evidentemente legate ai coseni dalla relazione identica

$$\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta = 0, \quad (6)$$

ed indipendenti dalla posizione del punto (x, y, z) sulla retta, giacchè re-

stano inalterate quando ad x, y, s si sostituiscono rispettivamente $x + \alpha t$, $y + \beta t$, $s + \gamma t$, qualunque sia t . Ora basta applicare alle (5) le formole (3) e (4) per ottenere

$$\frac{\delta \xi}{ds} = \frac{d\xi}{ds} - \frac{\zeta}{\rho}, \quad \frac{\delta \eta}{ds} = \frac{d\eta}{ds} - \frac{\zeta}{r} - \gamma, \quad \frac{\delta \zeta}{ds} = \frac{d\zeta}{ds} + \frac{\xi}{\rho} + \frac{\eta}{r} + \beta. \quad (7)$$

Queste sono, insieme alle (4), le formole fondamentali per le rette.

4. Dalle (3) risulta che per l'immobilità del punto (x, y, z) occorre e basta che sia

$$\frac{dx}{ds} = \frac{z}{\rho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r}, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{x}{\rho} - \frac{y}{r}. \quad (8)$$

Fissiamo l'origine degli archi in un punto qualunque della curva, in cui le curvatures (che noi sempre supporremo funzioni continue dell'arco) abbiano valori finiti; e siano x, y, s le sue coordinate rispetto al triedro fondamentale in un punto infinitamente vicino. Evidentemente x, y, s sono infinitesimi con s , e poichè le condizioni (8) debbono essere soddisfatte, si ha, applicando il teorema di l'Hospital:

$$\lim \frac{x}{s} = \lim \left(\frac{z}{\rho} - 1 \right) = -1, \quad \lim \frac{y}{s} = \lim \frac{z}{r} = 0.$$

Ne segue

$$\lim \frac{z}{s^2} = -\frac{1}{2} \lim \frac{1}{s} \left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r} \right) = -\frac{1}{2\rho} \lim \frac{x}{s} = \frac{1}{2\rho};$$

poi

$$\lim \frac{y}{s^3} = \frac{1}{3r} \lim \frac{z}{s^2} = \frac{1}{6\rho r}.$$

Ora, poichè trasferire l'origine degli archi nel punto $M'(s+ds)$, infinitamente vicino ad $M(s)$, equivale a porre $s+ds=0$, le espressioni delle coordinate u, v, w di M' rispetto agli assi di origine M si ottengono cambiando s in $-ds$ nei precedenti risultati, dimodochè si ha

$$u = ds, \quad v = -\frac{ds^2}{6\rho r}, \quad w = \frac{ds^3}{2\rho}. \quad (9)$$

Dunque i piani che contengono la tangente in M sono caratterizzati, fra tutti quelli che passano per M , dal fatto che la loro distanza ai punti infinitamente vicini ad M è infinitesima di ordine superiore, e per un solo di essi (il piano osculatore) la distanza stessa è infinitesima almeno del terzo ordine. Ne segue che ogni arco sufficientemente piccolo, preso intorno ad M , è situato da una stessa parte di qualunque piano condotto per la tangente in M , ad eccezione del piano osculatore, che, in generale, attraversa la curva. Quando si trascurano gli infinitesimi del terzo ordine si può supporre M' situato nel piano osculatore, e se si trascurano anche quelli del secondo ordine si può addirittura considerare M' come situato sulla tangente. Per conseguenza, in quelle questioni, per le quali è lecito trascurare gli infinitesimi superiori, è

anche lecito assimilare la curva ad una linea poligonale $MM'M''$. . . dai lati infinitamente piccoli, è considerare la tangente come la retta su cui giace un elemento MM' , il piano osculatore come il piano determinato da due elementi consecutivi MM' ed $M'M''$; ecc. E si passa da una posizione del triedro fondamentale alla posizione successiva facendo scorrere di ds il vertice sulla tangente, e facendo poi ruotare gli spigoli intorno al vertice in modo che acquistino i coseni direttori (1). Risulta finalmente dalle (9) che se un osservatore cammina sulla curva tenendo la testa sulla parte positiva della normale, e procedendo nel senso in cui cresce s , egli vedrà la curva elevarsi o abbassarsi secondo che ρ è positivo o negativo, e la vedrà volgere a sinistra o a destra secondo che r ha il segno di ρ o il segno opposto.

5. Ora vogliamo dimostrare che ogni coppia di equazioni intrinseche determina in modo unico una curva, almeno fra limiti convenienti di s , entro i quali le curvatures siano funzioni finite e continue dell'arco. È noto che in tali condizioni esiste sempre una terna di funzioni x, y, z , ed una sola, che soddisfa alle (8) e si riduce, per $s=0$, ad a, b, c . Evidentemente x, y, z sono (se la curva esiste) le coordinate, rispetto al triedro di origine M , di quello stesso punto che, nel triedro relativo al punto O , origine degli archi, ha le coordinate a, b, c . D'altra parte, in virtù delle (4), le condizioni necessarie e sufficienti per l'invariabilità della direzione (α, β, γ) sono

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{\rho} \quad , \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\gamma}{r} \quad , \quad \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\beta}{r} \quad . \quad (10)$$

Si noti che, se α, β, γ ed α', β', γ' sono due terne qualunque di funzioni soddisfacenti alle (10), si ottiene successivamente, in virtù delle stesse (10),

$$\frac{d}{ds}(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0 \quad , \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \text{costante}.$$

Ne segue che, se si determinano le tre terne di funzioni contenute nel primo dei quadri

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad ,$$

in modo che, soddisfacendo alle (10), prendano, per $s=0$, gli omologhi valori segnati nel secondo quadro, si avrà costantemente

$$\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{» } i \neq j \end{cases}$$

cioè il determinante rappresentato dal primo quadro è ortogonale. Ed ora è chiaro che gli elementi di tale determinante sono appunto i coseni direttori degli assi di origine O , rispetto a quelli di origine M , perchè danno le direzioni dei predetti assi per $s=0$, e d'altra parte soddisfano alle condizioni

(10), sufficienti per l'invariabilità delle direzioni stesse. Ciò premesso, è sempre lecito porre

$$x = x_0 + a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3, \quad y = y_0 + a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3, \quad z = z_0 + a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3,$$

e si riconosce poi, sostituendo questi valori nelle (8), e tenendo presenti le (10), che le nuove funzioni incognite x_0, y_0, z_0 soddisfano alle stesse (8), e debbono tutte ridursi a zero con s . Esse sono dunque pienamente determinate, ed è chiaro che rappresentano le coordinate di O rispetto agli assi di origine M . Ora noi possiamo, per ciascun valore di s , determinare le costanti a, b, c in modo che rappresentino le coordinate di M rispetto agli assi di origine O : basta (immaginando l'istante del passaggio di M per un punto fisso) porre x, y, z uguali a zero nelle precedenti relazioni, e risolvere il sistema rispetto ad a, b, c :

$$\begin{cases} a = -(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0), \\ b = -(\alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 z_0), \\ c = -(\alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0). \end{cases} \quad (11)$$

Così è determinata in modo unico la curva definita dalla data coppia di equazioni intrinseche, giacchè, variando s , son note le coordinate a, b, c di tutti i suoi punti rispetto ad una terna di assi immobili.

6. È interessante osservare come dalle (11) si possa rapidamente dedurre, mercè le condizioni d'immobilità (8) e (10), tutta l'ordinaria teoria delle curve storte. Si trova infatti, derivando,

$$\frac{da}{ds} = \alpha_1, \quad \frac{db}{ds} = \alpha_2, \quad \frac{dc}{ds} = \alpha_3; \quad (12)$$

poi

$$\frac{d^2 a}{ds^2} = \frac{\gamma_1}{\rho}, \quad \frac{d^2 b}{ds^2} = \frac{\gamma_2}{\rho}, \quad \frac{d^2 c}{ds^2} = \frac{\gamma_3}{\rho}, \quad (13)$$

e derivando ancora:

$$\frac{d^3 a}{ds^3} = \gamma_1 \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha_1}{\rho^2} - \frac{\beta_1}{\rho r}, \quad \text{ecc.} \quad (14)$$

Dunque, quando si fa uso di assi immobili, le derivate prime delle coordinate rispetto all'arco sono uguali ai coseni direttori della tangente, e le derivate seconde sono proporzionali ai coseni direttori della normale principale. Per la binormale si ha

$$\beta_1 = \alpha_3 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_3 = \left(\frac{dc}{ds} \frac{d^2 b}{ds^2} - \frac{db}{ds} \frac{d^2 c}{ds^2} \right) \rho, \quad \text{ecc.} \quad (15)$$

Quadrando e sommando le (12) si ottiene la formola

$$ds^2 = da^2 + db^2 + dc^2,$$

che permette di calcolare l'arco quando le coordinate sono date in funzione

d'una variabile qualunque. Quadrando, invece, e sommando le (13), si trova la formola

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2a}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2b}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2c}{ds^2}\right)^2,$$

che fa conoscere la *flessione* quando s è la variabile indipendente. Alla formola generale (cioè non vincolata alla scelta della variabile indipendente) si giunge operando analogamente sulle (15). Se poi le (14) si moltiplicano per $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, e si sommano, si ottiene, osservando le (15),

$$\frac{1}{r\rho^2} = \begin{vmatrix} \frac{da}{ds} & \frac{d^2a}{ds^2} & \frac{d^3a}{ds^3} \\ \frac{db}{ds} & \frac{d^2b}{ds^2} & \frac{d^3b}{ds^3} \\ \frac{dc}{ds} & \frac{d^2c}{ds^2} & \frac{d^3c}{ds^3} \end{vmatrix}.$$

Serve questa formola a calcolare la *torsione* quando già si conosce la *flessione*.

7. *Digressione sulla retta:* a) È noto che l'angolo θ di due direzioni (α, β, γ) ed $(\alpha', \beta', \gamma')$ è dato da una (qualunque) delle seguenti formole :

$$\cos \theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \quad , \quad \text{sen}^2 \theta = (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2.$$

Se le direzioni (α, β, γ) ed $(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta, \gamma + \delta\gamma)$ fanno l'angolo infinitesimo $\delta\theta$, la seconda formola dà

$$\delta\theta^2 = (\beta\delta\gamma - \gamma\delta\beta)^2 + (\gamma\delta\alpha - \alpha\delta\gamma)^2 + (\alpha\delta\beta - \beta\delta\alpha)^2. \quad (16)$$

Invece dalla prima si deduce

$$1 - \frac{1}{2} \delta\theta^2 + \dots = \sum \alpha(\alpha + \delta\alpha) = 1 + \sum \alpha\delta\alpha = 1 - \frac{1}{2} \sum \delta\alpha^2,$$

cioè

$$\delta\theta^2 = \delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2. \quad (17)$$

b) I coseni λ, μ, ν , che determinano la direzione perpendicolare a quelle che son definite dai coseni α, β, γ ed α', β', γ' , soddisfano alle condizioni di perpendicolarità $\sum \lambda\alpha = 0, \sum \lambda\alpha' = 0$, dalle quali si trae

$$\frac{\lambda}{\beta\gamma' - \gamma\beta'} = \frac{\mu}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{\nu}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = \frac{1}{\text{sen } \theta}, \quad (18)$$

fissando il senso positivo della direzione stessa in modo che coincida con quello dell'asse x quando le direzioni date vanno rispettivamente a coincidere con quelle degli assi x ed y . Evidentemente la distanza q di due rette è la proiezione, sulla comune perpendicolare, del segmento rettilineo che congiunge un punto qualunque (x, y, z) d'una retta ad un punto (x', y', z') dell'altra. Ne segue

$$q = \lambda(x' - x) + \mu(y' - y) + \nu(z' - z),$$

cioè, per le (18),

$$q \operatorname{sen} \theta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & x' - x \\ \beta & \beta' & y' - y \\ \gamma & \gamma' & z' - z \end{vmatrix}, \quad (19)$$

dove al secondo membro si può dar la forma

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & x' \\ \beta & \beta' & y' \\ \gamma & \gamma' & z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha & x \\ \beta' & \beta & y \\ \gamma' & \gamma & z \end{vmatrix} = -\Sigma(\alpha\xi' + \alpha'\xi),$$

dimodochè, ricordando la relazione (6), si può anche scrivere

$$q \operatorname{sen} \theta = \Sigma(\alpha' - \alpha)(\xi' - \xi).$$

Dunque, se le due rette sono infinitamente vicine, e se si rappresenta con δq la loro distanza,

$$\delta q \delta \theta = \delta \alpha \delta \xi + \delta \beta \delta \eta + \delta \gamma \delta \zeta. \quad (20)$$

Tornando alla (19) si osservi che, se una delle rette è l'asse x , si ha $-q \operatorname{sen} \theta = \xi$, e con ciò si ottiene l'interpretazione geometrica delle coordinate ξ, η, ζ .

c) Le rette dello spazio sono in numero quattro volte infinito, giacchè fra le sei coordinate d'una retta si hanno sempre due relazioni. Ogni altro vincolo imposto alle coordinate stesse vale a staccare dallo spazio una tripla infinità di rette, che si chiama *complesso*. Una coppia di equazioni distinte definisce una *congruenza*, o *infinità doppia di rette*, che si può dunque considerare come l'intersezione di due complessi, ed è l'analoga della *superficie*, o *infinità doppia di punti*. Finalmente l'insieme di tre distinte equazioni rappresenta una semplice infinità di rette, la quale costituisce evidentemente una particolare superficie, che si dice *rigata*. Delle rigate e delle congruenze ci occuperemo in seguito. Qui vogliamo limitarci ad esporre alcune proprietà dei più semplici complessi, che son rappresentati da un'equazione lineare

$$a\xi + b\eta + c\zeta + l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \quad (21)$$

e sono chiamati, per questa ragione, *complessi lineari*. Un tal complesso si dice *speciale* quando fra i coefficienti intercede il vincolo

$$al + bm + cn = 0, \quad (22)$$

in virtù del quale è lecito considerare i coefficienti stessi come proporzionali alle coordinate d'una retta, diguisachè la (21) esprime allora l'incontro di tale retta con tutte quelle che appartengono al complesso. Adunque *il complesso speciale è costituito dalle infinite rette che incontrano una retta data*. Può darsi che questa sia infinitamente lontana, e ciò accade quando a, b, c sono nulli; allora, in virtù di (21), le rette del complesso son tutte le perpendicolari alla direzione definita da coseni proporzionali ad l, m, n , esse sono cioè tutte le rette d'un fascio di piani paralleli, e però ben si può dire che vanno ad incontrare la comune intersezione di tali piani. Per un complesso lineare generale, cioè quando non sussi-

ste la (22), non è possibile che a, b, c siano nulli ad un tempo, e si può quindi considerare sempre la direzione definita dai coseni

$$\alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \beta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \gamma_0 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad (23)$$

ed in questa direzione si può assumere una certa retta, le cui altre coordinate ξ_0, η_0, ζ_0 vogliamo qui determinare opportunamente. Dalla (19) si ha, osservando (21),

$$-q \operatorname{sen} \theta = \sum \alpha \xi_0 + \frac{a\xi_0 + b\eta_0 + c\zeta_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sum \alpha \left(\xi_0 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right); \quad (24)$$

ed il secondo membro si riduce a $-p \cos \theta$ se si pone

$$\xi_0 = \frac{l - ap}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \eta_0 = \frac{m - bp}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \zeta_0 = \frac{n - cp}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (25)$$

Si determina poi la costante p osservando che deve aver luogo la relazione (6):

$$a(l - ap) + b(m - bp) + c(n - cp) = 0.$$

Ne segue

$$p = \frac{al + bm + cn}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad (26)$$

e l'eguaglianza (24) si riduce finalmente alla forma semplicissima

$$q \operatorname{tg} \theta = p. \quad (27)$$

La retta definita dalle coordinate (23) e (25) si chiama *asse del complesso*, e le considerazioni precedenti mostrano che ogni complesso lineare è costituito dalle rette, per le quali fra la distanza ad un certo asse, e l'angolo che questo fa con ciascuna retta del complesso, sussiste la relazione (27).

d) La *congruenza lineare*, o intersezione di due complessi lineari $x = 0$, $x' = 0$, appartiene anche agli infiniti complessi, che costituiscono il fascio $x + \lambda x' = 0$. Se si scrive che la condizione (22) è soddisfatta dai coefficienti di $x + \lambda x'$, si trova un'equazione del secondo grado in λ , e però nel fascio stesso esistono sempre due complessi speciali. Dunque *ogni congruenza lineare è costituita dalle rette che si appoggiano su certe due rette dello spazio*. Se invece del fascio si considera la rete di complessi $x + \lambda x' + \mu x'' = 0$, la condizione (22) conduce ad una relazione fra λ e μ , in virtù della quale esistono sempre, nella rete stessa, infiniti complessi speciali. Dunque la superficie rigata, intersezione dei complessi $x = 0, x' = 0, x'' = 0$, appartiene anche ad infiniti complessi speciali, cioè le rette che la costituiscono incontrano infinite altre rette, che si possono egualmente considerare come generatrici della superficie. Ne segue che una simile superficie può in due ben diversi modi essere generata da una retta, che vada successivamente occupando nello spazio una semplice infinità di posizioni. Tali speciali rigate si chiamano *quadriche*, e per l'indole delle loro proprietà, delle quali si occupa distesamente l'ordinaria Geometria analitica, esse tengono nella Geometria dello spazio il posto che le coniche (III, 1) hanno nel piano.

e) È per noi particolarmente notevole, fra le quadriche, il *paraboloide*

iperbolico, cioè la superficie generata da una retta che si muove parallelamente ad un piano appoggiandosi a due rette date. Tale superficie si può dunque considerare come l'intersezione dei tre complessi speciali

$$\sum \alpha \alpha_0 = 0 \quad , \quad \sum (\alpha' \xi + \alpha \xi') = 0 \quad , \quad \sum (\alpha'' \xi + \alpha \xi'') = 0 \quad ,$$

e però le sue generatrici (d'un sistema) appartengono anche ad ogni complesso della rete

$$\sum [(\lambda \alpha' + \mu \alpha'') \xi + (\alpha_0 + \lambda \xi' + \mu \xi'') \alpha] = 0 \quad . \quad (28)$$

Le generatrici del secondo sistema sono gli assi dei complessi speciali rappresentati dall'equazione (28) quando fra λ e μ si stabilisce una conveniente relazione, cioè

$$\lambda \sum \alpha' \alpha_0 + \mu \sum \alpha'' \alpha_0 + \lambda \mu \sum (\alpha' \xi'' + \alpha'' \xi') = 0 \quad . \quad (29)$$

Ora, poichè tali generatrici hanno i coseni direttori uguali a combinazioni lineari dei coseni α', β', γ' con $\alpha'', \beta'', \gamma''$, si vede che *sono anch'esse parallele, come quelle del primo sistema, ad un certo piano*. Adunque la superficie vien generata nello stesso modo dalle rette dell'uno o dell'altro sistema. Fra λ e μ si ponga invece la relazione

$$\lambda \sum \alpha' \alpha_0 + \mu \sum \alpha'' \alpha_0 = 0 \quad ,$$

generalmente distinta dalla (29) se le rette date in principio non s'incontrano, come si deve supporre quando la superficie non è piana. L'equazione (28) rappresenta allora infiniti complessi lineari non speciali, i cui assi son paralleli al piano direttore. Tale piano si può anzi fissare in modo che contenga uno degli assi. Così, dovendo essere soddisfatta la relazione (27), la generatrice situata nel piano incontra l'asse ad angolo retto, e questa circostanza mostra chiaramente che tutti gli altri assi stanno per necessità nel medesimo piano. Fissati in tal modo i due *piani direttori*, la loro intersezione si chiama *asse* del paraboloido, e le due generatrici che incontrano ortogonalmente l'asse si dicono *principali* per distinguerle dalle altre nei rispettivi sistemi. Esse debbono incontrarsi appunto perchè non appartengono allo stesso sistema, ed il loro punto comune sta necessariamente sull'asse, e si chiama *vertice* del paraboloido.

f) Per una generatrice qualunque, situata alla distanza t dal relativo piano direttore, essendo inoltre τ l'angolo di cui si trova spostata dalla direzione principale, si ha, in virtù di (27),

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{t}{p} \quad , \quad (30)$$

giacchè, nel caso che qui si considera, l'angolo θ è il complemento di τ . Dunque *il paraboloido iperbolico può essere generato da una retta, che si sposta parallelamente ad un piano appoggiandosi ad una retta fissa e ruotando intorno ad essa secondo la legge (30)*. La retta fissa OM è, se si vuole, la principale generatrice del secondo sistema; la sua proiezione OP sul primo piano direttore sarà, per conseguenza, la generatrice principale del primo sistema. Ora, se nel detto piano si eleva da P , proiezione di M , la perpendicolare alla proiezione della generatrice che passa per M , e similmente dal vertice O la perpendicolare ad OP , le

due rette così costruite *concorrono in un punto fisso* F. Infatti la considerazione dei triangoli rettangoli OPF ed MPF e dell'uguaglianza (30) dà

$$OF = OP \cdot \cot \tau = t \cot \varphi \cot \tau = p \cot \varphi ,$$

chiamando φ l'inclinazione di OM sul piano fisso. Dunque (III, 9, a) *le proiezioni delle generatrici sul piano direttore involuppano una parabola*, che ha il fuoco in F ed il vertice in O. Tuttavia si noti che l'involuppo di queste proiezioni è il vertice quando le generatrici principali sono perpendicolari, nel qual caso il paraboloido si dice *equilatero*. Se invece si fanno tendere a zero le costanti φ e p in modo che $p \cot \varphi$ si conservi uguale ad una costante non nulla, i due sistemi di generatrici tendono a coincidere, ed *il paraboloido tende a degenerare nel sistema delle tangenti ad una parabola*.

g) Osserviamo, per finire, come il significato di p risulti dalla (30), che dà le uguaglianze

$$p = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{t}{\tau} , \quad p' = \lim_{\tau' \rightarrow 0} \frac{t'}{\tau'} , \quad (31)$$

relative ai due sistemi di generatrici. Ben s'intende che, per entrambi i sistemi, si debbono computare gli angoli τ e τ' a partire dalle generatrici principali. Se, per esempio, la direzione $(\alpha', \beta', \gamma')$ è quella che si ottiene proiettando $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ sul secondo piano direttore, si ha

$$\sum \alpha' \alpha_0 = \text{sen } \varphi , \quad \sum \alpha'' \alpha_0 = \text{sen } \varphi \cos \tau' , \quad \sum \alpha' \alpha'' = \cos \tau' ,$$

e si deve prendere $\lambda = -\mu \cos \tau'$, dimodochè si giunge, mercè la formola (26), al seguente risultato:

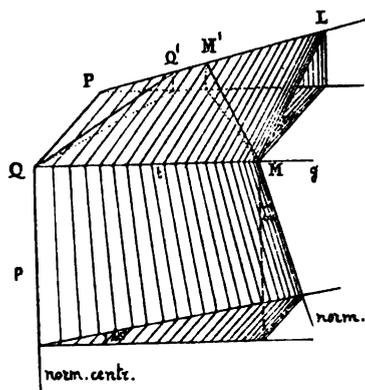
$$p = - \frac{\lambda \mu' \text{sen } \tau'}{\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda \mu \cos \tau'} = \frac{t'}{\text{tg } \tau'} = p' .$$

È dunque indifferente prendere l'uno o l'altro sistema di generatrici per conoscere il valore della costante p . Siccome poi si può dire altrettanto dell'angolo φ , ne risulta che sono uguali le due parabole involupate dalle proiezioni delle generatrici sui rispettivi piani direttori.

h) Varie superficie notevoli sono suscettibili d'una generazione analoga a quella del paraboloido iperbolico. Se per un punto mobile lungo una retta fissa si eleva a questa una perpendicolare, in modo che, mentre il punto si sposta di t , la perpendicolare ruoti d'un angolo τ , legato a t dalla relazione (30), si è visto che la retta mobile genera un paraboloido equilatero; ma se a $\text{tg } \tau$ si sostituisce τ nel primo membro di (30), la retta genera un'altra superficie notevole, che si chiama *elicoide rigato a piano direttore*. E se invece di $\text{tg } \tau$ o di τ si pone $\text{sen } 2\tau$, la superficie generata si chiama *cilindroide o conoide di Plücker*, ed è il luogo degli assi dei complessi lineari d'un fascio qualunque.

8. Superficie rigate. Una rigata si può considerare (cfr. § 4) come una successione semplicemente infinita di *elementi superficiali*, ciascuno dei quali è la striscia di superficie, compresa fra due generatrici infinitamente vicine, g e g' . Si chiamano *sviluppari* le rigate ad elementi piani, cioè quelle per le quali è lecito considerare g e g' come situate in un piano, a

prescindere da infinitesimi superiori: ciò può accadere sia perchè la distanza δq delle due rette è infinitesima rispetto al loro angolo $\delta\theta$, sia perchè si ha costantemente $\delta\theta=0$, vale a dire che le generatrici son tutte parallele, nel qual caso la superficie si chiama *cilindro*. Il punto di g , che sta sulla comune perpendicolare a g e g' , si muove insieme a g' quando, fissata g , si fa tendere g' a g , e può darsi che tenda ad un punto Q , fisso su g , che si chiama *punto centrale* di g . Il luogo dei punti centrali si chiama *spigolo di regresso* quando la superficie è sviluppabile, ed in particolare è chiaro che per le superficie cilindriche lo spigolo di regresso è tutto all'infinito. Per le altre rigate, che si dicono *storte*, il luogo dei punti centrali si chiama invece *linea di stringimento*. Se poi il rapporto $\delta q:\delta\theta$ tende ad un limite p , quando g' tende alla posizione fissa g , si dà a p il nome di *parametro distributore* lungo la generatrice g . Evidentemente le sole rigate per le quali



è $p=0$ su tutte le generatrici sono le sviluppabili non cilindriche; per le cilindriche, invece, p è infinito. Ora per un punto M , fisso su g , si traccino infinite curve, che incontrano g' in M', M'', \dots . Quando g' tende a g , le rette MM', MM'', \dots tendono a toccare in M le dette curve, e però *le tangenti in M a tutte le curve della superficie, che passano per M , stanno in un piano, che si chiama piano tangente in M , ed è la posizione limite del piano determinato dal punto M e dalla retta g' . Normale alla superficie,*

in M , è la perpendicolare condotta per M al piano tangente. Ciò premesso, osserviamo che le tangenti a tutte le curve della superficie, lungo la generatrice g , formano una congruenza lineare, limite di quella costituita dalle rette che si appoggiano a g ed a g' . Nella predetta congruenza le rette perpendicolari a g formano dunque un paraboloido iperbolico, e però il loro orientamento è regolato dalla legge (30), dove, in virtù di (31), p è proprio il parametro distributore, e t rappresenta la distanza QM . Dunque, se si conosce il piano che tocca una rigata storta in un punto Q della linea di stringimento, si conosce anche, mediante l'eguaglianza (30), il piano tangente in ogni altro punto M della generatrice che passa per Q . Sta in ciò la *legge di distribuzione dei piani tangenti*, scoperta da Chasles. Quando M , percorrendo g , si allontana indefinitamente da Q , in un verso o nell'altro, il piano tangente tende a disporsi perpendicolarmente alla posizione centrale. Ben altrimenti si comportano le sviluppabili. Infatti, quando p è nullo, si ha $\tau=1/2\pi$, e tutti i piani tangenti, lungo g , coincidono in uno, e ciò accade evidentemente anche per le superficie cilindriche. Dunque fra le superficie rigate *le sviluppabili sono caratterizzate dal fatto che il piano tangente in un punto M tocca la superficie lungo tutta la generatrice che passa per M .*

Finalmente si osservi che basta far ruotare di $\frac{1}{2}\pi$, intorno a g , tutte le tangenti perpendicolari a g , per farle diventar normali alla superficie, e per riconoscere in tal modo che *le normali ad una superficie rigata, lungo una generatrice, formano un paraboloido iperbolico*: questo si riduce ad un sistema di rette parallele solo nel caso delle sviluppabili.

9. Formole fondamentali. Il parametro distributore d'una superficie rigata, riferita al triedro fondamentale d'una curva qualunque dello spazio, si esprime facilmente mediante le variazioni delle coordinate $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$, della generatrice. Infatti, dividendo (20) per (17), si ottiene

$$p = \frac{\delta\alpha\delta\xi + \delta\beta\delta\eta + \delta\gamma\delta\zeta}{\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2}. \quad (32)$$

Se la curva si sceglie fra quelle che appartengono alla superficie, sono costantemente nulle ξ, η, ζ , e le formole (7) danno

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\eta = -\gamma ds, \quad \delta\zeta = \beta ds;$$

quindi, ponendo δq per $p\delta\theta$, si ottiene l'eguaglianza (evidente)

$$\frac{\delta q}{ds} = \beta \frac{\delta\gamma}{\delta\theta} - \gamma \frac{\delta\beta}{\delta\theta}. \quad (33)$$

La normale alla superficie, nel punto centrale, è perpendicolare a g ed alla comune perpendicolare a g e g' , definita in direzione da coseni proporzionali a

$$\beta\delta\gamma - \gamma\delta\beta, \quad \gamma\delta\alpha - \alpha\delta\gamma, \quad \alpha\delta\beta - \beta\delta\alpha.$$

I suoi coseni direttori sono dunque proporzionali ad una terna di quantità, la prima delle quali è

$$(\gamma\delta\alpha - \alpha\delta\gamma)\gamma - (\alpha\delta\beta - \beta\delta\alpha)\beta = \delta\alpha + \frac{1}{2}\delta\theta^2,$$

ossia $\delta\alpha$, trascurando infinitesimi superiori. Dunque, se si tien conto di (17), si vede che *la direzione della normale centrale è definita dai coseni*

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\theta}, \quad \frac{\delta\beta}{\delta\theta}, \quad \frac{\delta\gamma}{\delta\theta}.$$

Ciò premesso, se si osserva che il triedro formato dalla parallela condotta per M alla normale centrale, dalla tangente alla curva fondamentale nel punto M , e dalla perpendicolare a g , elevata per M nel piano tangente, è rettangolo lungo il terzo spigolo, si trova subito la prima delle uguaglianze

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\theta} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \sin \tau, \quad \frac{\delta q}{ds} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \cos \tau; \quad (34)$$

l'altra si ottiene dirigendo invece il primo spigolo perpendicolarmente a g ed a g' . Intanto la prima uguaglianza diventa, mercè la seconda,

$$\frac{\delta\alpha}{ds} = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{p} \frac{\delta q}{ds} \sin \tau = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{p} \sin \tau \cos \tau. \quad (35)$$

D'altra parte, tornando a scrivere la (33), si trova

$$\beta \frac{\delta \gamma}{ds} - \gamma \frac{\delta \beta}{ds} = \frac{1}{p} \left(\frac{\delta q}{ds} \right)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{p} \cos^2 \tau ,$$

e si ha pure

$$\beta \frac{\delta \beta}{ds} + \gamma \frac{\delta \gamma}{ds} = -\alpha \frac{\delta \alpha}{ds} = -\frac{\beta^2 + \gamma^2}{p} \alpha \operatorname{sen} \tau \cos \tau .$$

Dunque

$$\frac{\delta \beta}{ds} = (-\gamma \cos \tau - \alpha \beta \operatorname{sen} \tau) \frac{\cos \tau}{p} , \quad \frac{\delta \gamma}{ds} = (\beta \cos \tau - \alpha \gamma \operatorname{sen} \tau) \frac{\cos \tau}{p} . \quad (36)$$

Finalmente basta porre

$$\frac{1}{r} - \frac{\cos^2 \tau}{p} = \frac{1}{\rho} ,$$

e portare i risultati (35) e (36) nelle formole (4) per trovare le *condizioni*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2p} \operatorname{sen} 2\tau , \\ \frac{d\beta}{ds} = \frac{\gamma}{\rho} - \frac{\alpha\beta}{2p} \operatorname{sen} 2\tau , \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\beta}{\rho} - \frac{\alpha\gamma}{2p} \operatorname{sen} 2\tau , \end{array} \right. \quad (37)$$

necessarie e sufficienti perchè le funzioni α, β, γ rappresentino i coseni direttori della generatrice d'una superficie rigata, rispetto al triedro fondamentale d'una curva tracciata sulla superficie.

10. La linea di stringimento è caratterizzata dalla condizione $t=0$ o da $\tau=0$, ed anche, in virtù della prima eguaglianza (34), da $\delta\alpha=0$, cioè

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{\rho} .$$

Da questa si vede che α è costante se $\gamma=0$, e reciprocamente. Ora bisogna sapere che si chiamano *geodetiche* d'una superficie qualunque le curve che hanno per normale principale, in ogni punto, la normale alla superficie. Ciò premesso, l'ultima osservazione permette di asserire, con Bonnet, che *la linea di stringimento, quando è una geodetica, incontra le generatrici ad angolo costante; ed inversamente la linea di stringimento di una rigata, se incontra le generatrici ad angolo costante, è necessariamente una geodetica della superficie stessa.* Se poi ad un tempo si ha $\gamma=0$ ed α costante, è anche $\delta\alpha=0$, e però *la linea di stringimento è l'unica linea che può essere geodetica ed insieme incontrare le generatrici ad angolo costante.* Quando tale linea si assume come curva fondamentale, le formole (37) diventano

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{\rho} , \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\gamma}{\rho} , \quad \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\beta}{\rho}$$

ed esprimono che la direzione (α, β, γ) è invariabile rispetto ad un'altra curva, che ha la stessa flessione della linea di stringimento ed una torsione uguale ad $\frac{1}{\nu}$. In altri termini, se *si torce* la detta linea (mediante rotazioni infinitesime successive dei piani osculatori intorno alle tangenti) in modo che la torsione passi dal valore $\frac{1}{r}$ ad $\frac{1}{\nu}$, mentre restano invariati la flessione e l'arco, le generatrici, se sono trascinate nel moto restando rigidamente legate ai rispettivi triedri, finiranno per diventar parallele, cioè la superficie si trasformerà in un cilindro.

11. **Sviluppabili.** Per le superficie sviluppabili le formole (37) diventano

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{t}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\gamma}{r} - \frac{\alpha\beta}{t}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\beta}{r} - \frac{\alpha\gamma}{t}; \quad (38)$$

ma perchè sussistano, nel tendere di t a zero, cioè (escludendo i cilindri) quando si tende ad assumere lo spigolo di regresso come curva fondamentale, occorre che β e γ siano nulli. Dunque *ogni sviluppabile non cilindrica è il luogo delle tangenti ad una curva storta*. Per renderci conto di ciò in modo più diretto vogliamo prima osservare che la distanza δq , quando non è infinitesima come $\delta\theta$, è tale almeno come $\delta\theta^3$. Infatti, se si assume θ a variabile indipendente, e se si torna a scrivere la formola (20), ricordando che

$$\delta = d + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{6}d^3 + \dots,$$

si ottiene

$$\delta q d\theta = \left(1 + \frac{1}{2}d + \frac{1}{6}d^2\right) \sum d\alpha d\xi - \frac{1}{12} \sum d^2\alpha d^2\xi + \dots$$

e si vede subito che il secondo membro, nel quale già sono stati trascurati gli infinitesimi d'un ordine superiore al quarto, è appunto di quest'ordine almeno, se non è del secondo, vale a dire che δq è del terzo quando non è del primo ordine. Ciò premesso, se per g si conduce il piano parallelo a g' , è chiaro che la distanza del punto centrale Q' di g' al detto piano è anch'essa infinitesima almeno del terzo ordine, e però (§ 4) il piano così costruito è appunto quello che oscula in Q lo spigolo di regresso. Per dimostrare poi che g è la tangente allo spigolo stesso basta far vedere che la distanza $a g$ della proiezione di Q' sul piano osculatore è infinitesima d'un ordine superiore, e siccome questa distanza è uguale al prodotto di QQ' per un angolo infinitesimo, il teorema è dimostrato. Ed ora è chiaro che *i piani tangenti ad una superficie sviluppabile sono i piani osculatori dello spigolo di regresso*.

12. È poi importante osservare che ogni semplice infinità continua di piani P oscula una curva, ed è per conseguenza l'insieme dei piani tangenti alla sviluppabile che ha la curva stessa come spigolo di regresso, o, come si suol dire, *ogni semplice infinità continua di piani è involupata da una su-*

perficie sviluppabile. Infatti, se g è la posizione limite a cui tende l'intersezione dei piani P e P' , quando P' tende al piano P , supposto fisso, il luogo delle rette g è una rigata sviluppabile, perchè ammette come piano tangente unico, lungo g , il piano P . Per convincersi di ciò basta osservare che, se M è un punto qualunque di g , il piano Mg' tende a confondersi con P ; a tale conclusione si perviene con maggior rigore mediante il calcolo. Si noti (*cfr.* II, 5) che, se si deriva l'equazione di P esprimendo che x, y, z soddisfano alle condizioni d'immobilità (8), si deve ottenere l'equazione d'un altro piano che passa per g . Ne segue, fissando sulla superficie la curva fondamentale, che le due equazioni debbono esser prive del termine indipendente, e perchè ciò avvenga è necessario che manchi nella prima anche il termine in x . Dunque P contiene la tangente, e però coincide col piano tangente nel punto che si considera.

13. Hanno importanza nello studio delle curve storte le *superficie involupate dalle facce del triedro fondamentale*:

a) Già si è visto che i piani osculatori involupano la superficie che ammette la curva stessa come spigolo di regresso. Si ha di ciò una rapida conferma dal calcolo, giacchè derivando l'equazione del piano osculatore ($y=0$) si ottiene $z=0$; poi, derivando ancora, $x=0$, vale a dire che la generatrice è la tangente alla curva, e lo spigolo di regresso è la curva stessa;

b) Per la definizione (§ 1) dell'asse polare i piani normali debbono involupare appunto la superficie generata da questa retta: a tale superficie si dà il nome di *svilupabile polare*. La derivazione dell'equazione del piano normale ($x=0$) dà $z=\rho$, e però l'asse polare incontra la normale principale nel punto (*centro di curvatura*) situato alla distanza ρ da M ;

c) Finalmente l'involuppo dei piani rettificanti si chiama *svilupabile rettificante*, perchè su tale superficie la curva è necessariamente una geodetica, e d'altra parte si dimostrerà che le geodetiche d'una superficie segnano su questa il più breve cammino fra due punti qualunque, non troppo lontani, della superficie stessa. Ne segue che, quando si svolge la superficie per applicarla sopra un piano nel modo accennato in fine del § 10, la curva si trasforma in una retta, perchè deve continuare a segnare nel piano il più breve cammino fra due punti. Trarremo subito dal calcolo una facile conferma di questo fatto. Derivando l'equazione del piano rettificante ($z=0$) si trova immediatamente che l'inclinazione ϵ della generatrice della sviluppabile rettificante sulla tangente alla curva è determinata dalla formola

$$\operatorname{tg} \epsilon = -\frac{r}{\rho} . \quad (39)$$

Se ai coseni direttori di tale generatrice ($\alpha = \cos \epsilon, \beta = \sin \epsilon, \gamma = 0$) si applicano le formole (4) si ottiene

$$\frac{\delta \alpha}{\delta s} = -\sin \epsilon \frac{d\epsilon}{ds} , \quad \frac{\delta \beta}{\delta s} = \cos \epsilon \frac{d\epsilon}{ds} , \quad \frac{\delta \gamma}{\delta s} = \frac{\cos \epsilon}{\rho} + \frac{\sin \epsilon}{r} = 0 ;$$

quindi $\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2 = ds^2$. Dunque l'angolo di due generatrici rettificanti infinitamente vicine è ds . Ciò premesso, se immaginiamo che si faccia ruotare intorno alla generatrice g' il piano rettificante $g'x'$ finchè coincida col precedente piano gx , è chiaro che la tangente in M' andrà a coincidere con la tangente in M , vale a dire che due elementi consecutivi (§ 4) qualunque si disporranno in linea retta;

d) Qui è utile aggiungere le seguenti considerazioni. Quando di tre generatrici g, g', g'' d'una sviluppabile qualunque, consecutive nel senso del § 4, si suppone che g'' ruoti intorno a g' fino a trovarsi in uno stesso piano con g e g' , il punto M' non si muove e l'angolo (g', g'') non varia. Ne segue che lo spigolo di regresso, mentre diventa piano, conserva inalterata la flessione in ogni punto. Dunque ad ogni curva dello spazio si può far corrispondere punto per punto una curva piana, in modo che due archi corrispondenti qualunque siano uguali, e la flessione in due punti corrispondenti sia la stessa. Basta, per questo, applicare sopra un piano la sviluppabile delle tangenti. È poi chiaro che l'equazione intrinseca della curva piana in cui viene così a trasformarsi una curva qualunque si ottiene eliminando la torsione fra le equazioni intrinseche della curva storta. Ogni altra sviluppabile, condotta per la curva considerata, si può applicare sopra un piano distruggendo la torsione, *ma in pari tempo alterando la flessione della curva*. Esiste una sviluppabile tale che la sua applicazione sopra un piano distrugga totalmente anche la flessione della curva, *trasformi cioè la curva in una retta*? Una tale superficie esiste sempre, e, per le cose dette innanzi, essa è precisamente quella che abbiamo chiamata sviluppabile rettificante.

14. Partendo da una curva qualunque d'una sviluppabile è facile *determinare lo spigolo di regresso*. Questo è generato dal punto $(-t\alpha, -t\beta, -t\gamma)$, ed infatti l'applicazione delle formole (3) a tali coordinate dà, osservando le (38),

$$\frac{\delta x}{ds} : \alpha = \frac{\delta y}{ds} : \beta = \frac{\delta z}{ds} : \gamma = \alpha - \frac{dt}{ds}.$$

Così vediamo inoltre che l'arco dello spigolo di regresso è

$$s' = \int \alpha ds - t,$$

e che tale curva si riduce ad un punto quando $t = \int \alpha ds$: è dunque questa un'eguaglianza che *caratterizza le superficie coniche*. In particolare, per $\alpha = 0$, t è costante, e però le traiettorie ortogonali delle generatrici d'un cono sono linee sferiche. Se poi, mentre si ha $\alpha = 0$, è $t = \text{costante}$, la condizione $t = \int \alpha ds$ è soddisfatta, e però la superficie è necessariamente conica. Nel caso generale le formole (4), quando si tenga conto delle (38), danno

$$\frac{\delta\alpha}{ds} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{t}, \quad \frac{\delta\beta}{ds} = -\frac{\alpha\beta}{t}, \quad \frac{\delta\gamma}{ds} = -\frac{\alpha\gamma}{t}, \quad (40)$$

e fanno così conoscere la direzione della normale principale. Ne segue che i coseni direttori a, b, c della binormale sono proporzionali a $0, \gamma, -\beta$; poi, applicando nuovamente le formole (4) e (38), si trova

$$\frac{\delta a}{\delta \alpha} = \frac{\delta b}{\delta \beta} = \frac{\delta c}{\delta \gamma} = \frac{\beta t}{(\beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}} \rho}. \quad (41)$$

Ed ora basta quadrare e sommare le (40) e le (41) per ottenere i raggi di curvatura dello spigolo di regresso:

$$\rho' = \frac{t}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \left(\frac{dt}{ds} - \alpha \right), \quad r' = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \rho \left(\frac{dt}{ds} - \alpha \right). \quad (42)$$

15. Sviluppate e sviluppani. Se (cfr. II, 9) le tangenti ad una curva sono normali ad un'altra curva, la prima si chiama *svilupata* della seconda, e questa si dice *svilupante* della prima. In altri termini le traiettorie ortogonali delle generatrici d'una sviluppabile qualunque sono le sviluppani dello spigolo di regresso. Prendiamo come curva fondamentale una di queste traiettorie. Siccome i coseni direttori ($\alpha=0, \beta=\sin\psi, \gamma=\cos\psi$) della generatrice debbono soddisfare alle condizioni (38), si ha

$$-t \cos\psi = \rho, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r}. \quad (43)$$

La seconda uguaglianza continua ad essere soddisfatta quando ψ si agguinza una costante arbitraria. Ne segue che, se le generatrici d'una sviluppabile ruotano d'uno stesso angolo intorno ad una loro traiettoria ortogonale, esse non cessano di costituire una superficie sviluppabile. La prima uguaglianza ci dice invece che la coordinata z del punto dello spigolo di regresso è uguale a ρ , vale a dire (§ 13, b) che il detto punto sta sull'asse polare, cioè lo spigolo stesso appartiene alla sviluppabile polare. Dunque le infinite sviluppate d'una curva son tutte situate sulla sviluppabile polare. Inoltre, se si osserva che, in virtù delle (40), nel caso attuale sono nulli $\delta\beta$ e $\delta\gamma$, si riconosce subito che il piano rettificante della sviluppata coincide col piano normale alla svilupante. Ne segue che, quando la sviluppabile polare d'una curva si applica sul piano, tutte le sviluppate della curva stessa si rettificano. Finalmente le curvatures delle sviluppate son date dalle formole (42); e se si tien conto delle (43) si trova

$$s' = \frac{\rho}{\cos\psi}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\cos\psi} \frac{d}{ds} \frac{\rho}{\cos\psi}, \quad r' = -\frac{\rho}{\sin\psi} \frac{d}{ds} \frac{\rho}{\cos\psi}. \quad (44)$$

Quando si conoscono ρ, r e conseguentemente ψ in funzione di s , basta eliminare s fra le precedenti uguaglianze per trovare le equazioni intrinseche di una sviluppata qualunque. Per $\psi=0$ si ricade sulle formole relative alle curve piane. Anche per una curva storta le sviluppani si possono considerare, in virtù dell'uguaglianza $-t=s'$, come descritte dai punti d'un filo fles-

sibile ed inestendibile, primitivamente avvolto sulla curva, e che si va poi svolgendo mantenendosi sempre teso. Così è facile spiegarsi ciò che risulta dalla prima formola (43) quando si osserva che ρ si annulla con t , cioè che *lo spigolo di regresso d'una sviluppabile è il luogo dei punti di regresso delle traiettorie ortogonali delle generatrici.*

16. Asse centrale. Si chiama così la comune perpendicolare a due normali principali infinitamente vicine. Questa retta, parallela a due piani rettificanti infinitamente vicini, è parallela alla generatrice rettificante, e però, se h è la sua distanza dal punto M della curva, le sue coordinate sono

$$\alpha = \cos \varepsilon, \quad \beta = \sin \varepsilon, \quad \gamma = 0, \quad \xi = -h \sin \varepsilon, \quad \eta = h \cos \varepsilon, \quad \zeta = 0 : \quad (45)$$

ε è dato dalla formola (39), ed h si determina esprimendo che la retta considerata e la normale principale nel punto M' , infinitamente vicino ad M , si incontrano. Quando si passa dall'una all'altra normale le coordinate subiscono, in virtù di (4) e (7), variazioni proporzionali ad $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{r}, 0, 0, 1, 0$. Dunque la condizione per l'incontro è

$$\frac{\xi}{\rho} + \frac{\eta}{r} + \beta = 0, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{\rho} - \frac{\cot \varepsilon}{r} = \frac{1}{h},$$

e finalmente, osservando (39),

$$h = \frac{\rho r^2}{\rho^2 + r^2}. \quad (46)$$

Dunque l'asse centrale incontra la normale principale fra il punto M ed il centro di curvatura, dividendo il segmento rettilineo, che termina in questi punti, nel rapporto di $\sin^2 \varepsilon$ a $\cos^2 \varepsilon$. Se alle coordinate dell'asse centrale si applicano le formole (4) e (7), si trova subito, mercè le formole (17) e (20),

$$\delta \theta = d\varepsilon, \quad \delta q = dh, \quad (47)$$

e però $dh : d\varepsilon$ è il parametro distributore della superficie generata dall'asse centrale. Questa retta si presenta in varie interessanti questioni. Così, per esempio, quando si considera il moto del triedro fondamentale lungo la curva, *l'asse centrale, nello spazio rigidamente fissato al triedro, è il luogo istantaneo dei punti che si spostano meno velocemente di tutti gli altri.* Infatti lo spostamento ds' d'un punto rigidamente legato al triedro fondamentale si deduce subito dalle formole (3), quadrandole e sommandole, e supponendovi x, y, z costanti:

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \left(\frac{z}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{z^2}{r^2} + \left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right)^2.$$

Poste uguali a zero le derivate parziali del secondo membro rispetto ad x, y, z , si ottiene

$$\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r} = 0, \quad \left(\frac{z}{\rho} - 1\right) \frac{1}{\rho} + \frac{z}{r^2} = 0,$$

cioè $y = x \operatorname{tg} \epsilon$, $z = h$, dove h ed ϵ hanno i significati (46) e (39); poi si vede che sulla retta così trovata si ha $ds' = \cos \epsilon \cdot ds$. La precedente proprietà dell'asse centrale si spiega osservando che *le normali alle traiettorie di tutti i punti rigidamente legati al triedro fondamentale costituiscono un complesso lineare, il cui asse è l'asse centrale della traiettoria dell'origine*, ed è anche, evidentemente, l'asse centrale di tutte le altre traiettorie. Infatti, se la direzione (α, β, γ) è quella d'una normale in (x, y, z) alla traiettoria di questo punto, la condizione di perpendicolarità $\alpha \delta x + \beta \delta y + \gamma \delta z = 0$ diventa, in virtù delle (3),

$$\alpha \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) - \beta \frac{z}{r} + \gamma \left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right) = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad \frac{\xi}{r} - \frac{\eta}{\rho} + \alpha = 0 :$$

questa è (§ 7, c) l'equazione d'un complesso lineare, nel quale, in virtù di (26), si ha $p = -h \cot \epsilon$, vale a dire che p , come risulta dalla (33), è il parametro distributore sulla superficie delle normali principali; poi dalle formole (23) e (25) si ricavano per le coordinate dell'asse appunto i valori (45). Del resto, siccome la curva fondamentale si può scegliere ad arbitrio fra le traiettorie dei punti d'un sistema rigido, è chiaro che la retta trovata è asse centrale di qualunque altra traiettoria. Ne segue che *le normali principali di tutte le traiettorie sono le rette che incontrano ortogonalmente l'asse centrale*. Si possono poi facilmente costruire anche le tangenti, le binormali ed i raggi di curvatura, dopo avere osservato che $h \cot \epsilon$ ha un valore unico per tutte le traiettorie.

X. CURVE STORTE NOTEVOLI.

1. Curve sferiche. Una linea tracciata sopra una sfera ha tutti i suoi punti a distanza costante R da un punto O , centro della sfera. Le coordinate di questo punto rispetto al triedro fondamentale della curva considerata sono dunque tre funzioni x, y, z , costantemente legate dalla relazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad , \quad (1)$$

e soddisfacenti alle condizioni (8) del precedente capitolo. Una prima derivazione della (1) dà $x = 0$. Dunque *i piani normali di tutte le linee tracciate sopra una sfera concorrono nel centro*. La derivazione di $x = 0$ dà $z = \rho$. Dunque *il centro di curvatura in un punto qualunque d'una linea sferica si ottiene proiettando sul piano osculatore il centro della sfera*. Finalmente, derivando ancora $z = \rho$, si trova il valore di y , e si vede che le coordinate del

centro della sfera sono

$$x=0 \quad , \quad y=-r \frac{d\rho}{ds} \quad , \quad z=\rho ; \quad (2)$$

sostituendole in (1) si ottiene

$$R^2 = \rho^2 + \left(r \frac{d\rho}{ds} \right)^2 . \quad (3)$$

Questa eguaglianza *caratterizza le linee tracciate sopra una sfera di raggio R*. Infatti, se si applicano le formole (3) del capitolo precedente alle coordinate (2), si trova

$$\frac{\delta x}{ds} = 0 \quad , \quad \frac{\delta y}{ds} = - \left[\frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\rho}{ds} \right) \right] \quad , \quad \frac{\delta z}{ds} = 0 \quad , \quad (4)$$

e la derivazione di (3) dà $\delta y = 0$. Dunque, quando è soddisfatta la condizione (3), esiste un punto *fisso* O, la cui distanza dai punti della curva è costantemente uguale ad R, cioè la curva appartiene ad una sfera di raggio R e di centro O. Ed ora possiamo aggiungere che *la condizione necessaria e sufficiente perchè una curva sia sferica è*

$$\frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\rho}{ds} \right) = 0 . \quad (5)$$

2. Per qualunque curva esiste sempre, in ciascun punto M, una curva sferica che ha lo stesso triedro fondamentale, e curvatures uguali a quelle della curva considerata. La seconda curva appartiene necessariamente alla sfera che ha il raggio R, dato dalla (3), ed il centro nel punto O, definito dalle coordinate (2). Questa sfera si dice *osculatrice* alla prima curva nel punto M. La tangente alla curva (O), in O, è subito determinata dalle (4): essa è parallela alla binormale di (M), e supponendola diretta in senso inverso si ha

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\rho}{ds} \right) . \quad (6)$$

Evidentemente la tangente di cui si tratta è l'asse polare di (M). In altri termini *il luogo dei centri delle sfere osculatrici è lo spigolo di regresso della sviluppabile polare*. Non occorrono dunque altri calcoli per veder subito che la binormale di (O) è parallela alla tangente di (M), e che, per conseguenza, *le normali principali alle due curve son parallele*: noi le supporremo dirette in sensi opposti. Inoltre si ha manifestamente

$$\frac{\rho'}{r} = \frac{r'}{\rho} = \frac{ds'}{ds} . \quad (7)$$

Intanto si noti che le coordinate di M nel piano osculatore di (O) sono $x = -r \frac{d\rho}{ds}$, $y = \rho$; portandole in (6) si ottiene $ds' = \frac{y}{r} ds - dx$; quindi

$$\frac{dx}{ds'} = \left(\frac{y}{r} - \frac{ds'}{ds} \right) \frac{ds}{ds'} = \frac{y}{\rho'} - 1 \quad , \quad \frac{dy}{ds'} = - \frac{x}{r} \frac{ds}{ds'} = - \frac{x}{\rho'} .$$

Ne segue che il punto M si può considerare come fisso nel piano osculatore di (O) . Ciò è del resto evidente se si osserva che, quando M passa alle posizioni successive M' , ecc., nel senso già indicato (IX, 4), il piano normale di (M) ruota intorno ad O . In altri termini i piani normali agli elementi MM' , $M'M''$, $M''M'''$ concorrono in O . Così chiaramente s'intuisce un fatto che il calcolo dimostra con tutto rigore, cioè che la sfera osculatrice in M è il limite della sfera che passa per M e per altri tre punti della curva quando questi tendono ad M .

3. Eliche cilindriche. Si chiamano *eliche cilindriche* le curve che incontrano sotto un angolo costante le generatrici d'una superficie cilindrica. È chiaro che queste curve sono le geodetiche (IX, 10; 13, c) di simili superficie, perchè si trasformano in rette quando le superficie stesse si svolgono sul piano. Se α, β, γ sono i coseni direttori della generatrice, le condizioni d'invariabilità (IX, form. 10) debbono essere soddisfatte per α costante, e però si ha necessariamente $\gamma = 0, \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{r} = 0$, dimodochè si può porre $\alpha = \cos \varepsilon, \beta = \sin \varepsilon$, dove ε ha il solito significato (IX, form. 39). In altri termini, come si era previsto, la superficie rettificante è lo stesso cilindro. Intanto ε è costante. Inversamente, quando ε è costante, le condizioni d'invariabilità sono soddisfatte dai coseni $\alpha = \cos \varepsilon, \beta = \sin \varepsilon, \gamma = 0$, e però la curva è tracciata sopra un cilindro, e ne incontra le generatrici sotto l'angolo costante ε : essa è un'elica cilindrica. Dunque perchè una curva sia un'elica cilindrica è necessario e sufficiente che il rapporto delle sue curvature sia costante.

4. Teorema di Puiseux. Fra le eliche cilindriche la più semplice è l'*elica circolare*, cioè quella che, essendo tracciata sopra un cilindro circolare, ha tutti i suoi punti ugualmente distanti da una retta (*asse* del cilindro). È chiaro che qualunque normale alla superficie incontra l'asse ad angolo retto, e però fanno altrettanto le normali principali della curva, giacchè questa è una geodetica. Dunque con l'asse del cilindro, comune perpendicolare a tutte le normali principali, coincidono tutti gli assi centrali (IX, 16). Ne segue che dev'essere costante la distanza h ; poi le formole (39) e (46) del precedente capitolo danno

$$\rho = \frac{h}{\cos^3 \varepsilon}, \quad r = -\frac{h}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

e mostrano che sono costanti anche ρ ed r . Inversamente, quando ρ ed r sono costanti, sono tali anche ε ed h , e però (IX, form. 47) si ha pure $\delta\theta = 0, \delta q = 0$. La prima eguaglianza prova che l'asse centrale resta costantemente parallelo a sè stesso; la seconda mostra invece che l'asse centrale non si sposta lateralmente. Esso non può che scorrere lungo una retta, fissa nello spazio, e però il punto M , che resta alla distanza costante h da questa retta, si muove

sopra un cilindro circolare, descrivendo una curva che incontra le generatrici sotto l'angolo costante ε . Dunque *perchè una curva sia un'elica circolare è necessario e sufficiente che le sue curvature siano costanti.*

5. Eliche e geodetiche delle superficie coniche. Si chiamano *eliche coniche* le curve che incontrano sotto un angolo costante le generatrici d'un cono. Esse non sono mai le geodetiche di tali superficie, perchè non si rettificano quando la superficie del cono si applica sul piano, ma si trasformano invece (I, 11, c) in spirali logaritmiche. Nelle condizioni (38) del precedente capitolo supponiamo che α sia una costante diversa da zero, escludendo così un caso già considerato (IX, 14). Allora dovrà essere $t = \alpha s$; quindi, dopo aver posto $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2} \operatorname{sen} \psi$, $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2} \operatorname{cos} \psi$, le dette condizioni diventano

$$\operatorname{cos} \psi = -\frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \frac{\rho}{s}, \quad \frac{1}{r} = \frac{d\psi}{ds} + \frac{\operatorname{tg} \psi}{s}. \quad (8)$$

Data una curva piana qualunque si può sempre, senza fletterla, torcerla in modo che diventi un'elica conica: la prima eguaglianza (8) serve a calcolare la funzione ψ ; poi, sostituendo questa nella seconda eguaglianza, si determina la torsione che in ogni punto bisogna dare alla curva affinchè questa incontri sotto un angolo costante le generatrici d'un cono, il cui vertice ha le coordinate $-t\alpha$, $-t\beta$, $-t\gamma$. Invece per le *geodetiche* bisogna, nelle predette condizioni (38), porre $\alpha = \operatorname{cos} \varepsilon$, $\beta = \operatorname{sen} \varepsilon$, $\gamma = 0$; si ottiene così la seconda delle seguenti uguaglianze:

$$\frac{dt}{ds} = \operatorname{cos} \varepsilon, \quad \frac{d\varepsilon}{ds} = -\frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{t}. \quad (9)$$

Si sa (IX, 14) che la prima è quella che caratterizza le superficie coniche. Se ne deduce successivamente

$$\frac{dt}{t} + \frac{d\varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon} = 0, \quad -t = \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \varepsilon},$$

vale a dire che *la proiezione del vertice del cono sul piano normale in M resta alla distanza costante a da M*. Portando l'ultimo risultato nella seconda delle (9) ed integrando si ottiene $sr = ap$. Dunque *nelle geodetiche delle superficie coniche la torsione varia come il prodotto della flessione per l'arco*. Questa proprietà non appartiene ad altre curve, perchè, supponendola soddisfatta, si verifica subito, mediante le solite condizioni d'immobilità, che il punto $(-s, a, 0)$ è fisso nello spazio, vale a dire che il piano rettificante involupa un cono.

6. Circoli storti. Un circolo storto è la curva che si ottiene torcendo, senza fletterlo, un circolo piano, diguisachè una delle sue equazioni intrinseche è sempre $\rho = \text{costante}$. In questa ipotesi la formola (3) dà $R = \rho$, e però *le sfere osculatrici d'un circolo storto son tutte uguali fra loro*. Questa proprie-

tà non appartiene ad altre curve. Infatti la derivazione della formola (3) dà

$$R \frac{dR}{ds} = \left[\frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\rho}{ds} \right) \right] r \frac{d\rho}{ds} .$$

Ne segue che, se R è costante, e se non è soddisfatta la (5), nel qual caso tutte le sfere coinciderebbero in una, è necessariamente costante anche ρ . Inoltre le formole (6) e (7) danno

$$s' = R \int \frac{ds}{r} , \quad \rho' = R , \quad rr' = R^2 .$$

Dunque, come ha trovato Bouquet, *il luogo dei centri di curvatura d'un circolo storto è un altro circolo storto*, che ha la stessa flessione, ed una torsione che varia in ragione inversa della torsione del primo circolo.

7. Esercizii: a) *Può un'elica appartenere ad una sfera?* Perchè ciò avvenga la condizione (5) dev'essere soddisfatta quando vi si pone $r = -\rho \operatorname{tg} \varepsilon$, con ε costante. In tal modo si ottiene successivamente

$$\frac{d}{ds} \left(\rho \frac{d\rho}{ds} \right) = -\cot^2 \varepsilon , \quad \rho^2 + s^2 \cot^2 \varepsilon = \text{costante} .$$

Dunque (I, 8, c) le eliche sferiche si deducono per semplice torsione dalle ipocicloidi, dalle epicloidi e dalla cicloide ($\varepsilon < \frac{1}{4}\pi$, $\varepsilon > \frac{1}{4}\pi$, $\varepsilon = \frac{1}{4}\pi$).

b) Esistono *eliche cilindro-coniche*, cioè curve che siano eliche ad un tempo sopra un cilindro e sopra un cono? Bisogna che siano soddisfatte le condizioni (8) e simultaneamente si abbia $r = -\rho \operatorname{tg} \varepsilon$, con ε costante. Prima si osservi che le (8) si possono scrivere nel seguente modo:

$$s \cos \psi = -\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \rho , \quad \frac{d}{ds} (s \operatorname{sen} \psi) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \cot \varepsilon .$$

Integrando la seconda e portando il risultato nella prima si trova che *le eliche cilindro-coniche hanno i raggi di curvatura proporzionali all'arco*, misurato a partire dal vertice del cono. Reciprocamente ogni curva rappresentata dalle equazioni intrinseche $\rho = ks$, $r = k's$, è un'elica cilindro-conica, perchè, determinate le costanti $\psi, \varepsilon, \alpha$ mercè le relazioni

$$k = -\cot \psi \cot \varepsilon , \quad k' = \cot \psi , \quad \operatorname{sen} \psi = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \cot \varepsilon ,$$

è chiaro che le condizioni accennate in principio sono soddisfatte; e si può aggiungere che la curva *appartiene ad un cono circolare*, perchè la direzione *invariabile* ($\cos \varepsilon, \operatorname{sen} \varepsilon, 0$) delle generatrici del cilindro fa un angolo *costante* con quella (α, β, γ) del raggio vettore. Le eliche cilindro-coniche sono, per così dire, le spirali logaritmiche dello spazio a tre dimensioni: esse godono della singolare proprietà, già segnalata (II, 7, i) per le dette curve, di non deformarsi quando vengono sottoposte ad una dilatazione uniforme intorno ad un punto qualunque dello spazio.

c) Quali sono le *sviluppati delle eliche cilindriche*? Riferendoci alle formole del capitolo precedente osserviamo che, se il rapporto di ρ' ad r' si suppone costante nelle formole (44), è necessario che ψ sia costante, ed allora la seconda

formola (43) mostra che la torsione della sviluppante è nulla. Dunque *le sviluppanti delle eliche cilindriche sono curve piane*. Procedendo in senso inverso si riconosce facilmente che non esistono altre sviluppate di curve piane. Inoltre, se ci rammentiamo che la binormale della sviluppante e la generatrice rettificante della sviluppata son parallele, vediamo subito, nel caso delle eliche, che *i piani delle sviluppanti sono perpendicolari alle generatrici del cilindro*. Nel caso particolare dell'elica circolare le formole (44) danno

$$\rho \frac{d\rho}{ds} = \rho' \cos^2 \psi = -r' \operatorname{sen} \psi \cos \psi = -\frac{\rho' r'^2}{\rho'^2 + r'^2},$$

cioè $\rho^2 = 2as$, chiamando a il raggio del cilindro. Dunque *le sviluppanti delle eliche circolari sono sviluppanti di circolo*.

d) Una delle sviluppate d'una curva sferica si riduce manifestamente al centro della sfera; le altre se ne deducono facendo ruotare d'uno stesso angolo intorno alla curva, nei rispettivi piani normali, i raggi della sfera. In particolare, se nelle solite formole (44) si cambia ψ in $\psi - \frac{1}{2}\pi$, rappresentando con ψ l'angolo della normale principale in M col raggio OM , dimodochè $\rho = R \cos \psi$, si ottengono le formole

$$s' = R \cot \psi, \quad \rho' = \frac{R^2}{2} \frac{d}{ds} (\cot^2 \psi), \quad r' = R^2 \frac{d}{ds} \cot \psi,$$

che definiscono lo *spigolo di regresso della sviluppabile circoscritta alla sfera lungo la curva data*. Siccome si ha $s'r' = R\rho'$, si vede (§ 5) che il detto spigolo è geodetica d'un cono. È questa una proprietà evidente se si riflette che la sviluppabile polare d'una curva sferica è necessariamente un cono, sul quale appunto sono geodetiche (IX, 15) tutte le sviluppate della curva data.

e) *Costruire una serie di sfere, che abbiano i loro centri sopra una data linea, e risultino osculatrici ad una stessa curva*. Questo problema, proposto da Jamet, si risolve facilmente se si osserva che, in virtù d'una nota (§ 2) proprietà, *una linea qualunque si riduce ad un punto quando la sua sviluppabile polare si applica sul piano*. Con ciò si vuol dire che quando i piani normali, mediante successive rotazioni intorno ai corrispondenti assi polari, vanno a coincidere in un piano fisso, i punti della curva, rigidamente fissati nei detti piani, finiscono per confondersi in un sol punto del piano fisso. Per risolvere il problema di Jamet bisogna cominciare dal trasformare la data curva (O) , alterandone la sola torsione, in una curva piana (O') ; si deve poi costruire una serie di sfere che passino per un punto arbitrario M del piano di (O') , ed abbiano i loro centri su (O') . Basta ora torcere la curva (O') , senza fletterla, fino a restituirle la primitiva configurazione (O) : le sfere, rigidamente trascinate nel moto, non cesseranno di osculare una stessa curva, luogo delle posizioni occupate da M nei piani osculatori di (O) . Adunque *ogni serie di sfere si può rendere osculatrice ad infinite curve deformando convenientemente la linea dei centri*; e due configurazioni qualunque di questa linea si potranno sempre dedurre l'una dall'altra per semplice torsione.

8. Curve di Bertrand. Si chiama *curva di Bertrand* ogni linea che ha le curvatures linearmente vincolate:

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1. \quad (10)$$

In particolare sono curve di Bertrand i circoli storti ($b=0$) e le curve a torsione costante ($a=0$). Anche le eliche si possono considerare come curve di Bertrand, giacchè facendo indefinitamente crescere a e b , in modo che il loro rapporto tenda ad un limite $cot\epsilon$, l'equazione (10) tende a convertirsi nella equazione caratteristica delle eliche: $r = -\rho \operatorname{tg}\epsilon$. Le curve di Bertrand sono caratterizzate dalla seguente proprietà: *le loro normali principali sono normali principali di un'altra curva*. Sulla normale principale d'una curva qualunque (M) prendiamo il punto M_1 alla distanza a da M. Applicando le formole fondamentali alle coordinate $(0, 0, a)$ si ottiene

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{a}{\rho}, \quad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{a}{r}, \quad \frac{\delta z}{ds} = \frac{da}{ds}. \quad (11)$$

Ora, affinchè (M_1) incontri ortogonalmente le normali principali di (M), bisogna che si abbia $\delta z = 0$, cioè che a sia costante. Siano $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$, $\gamma = 0$ i coseni direttori della tangente ad (M_1) , in M_1 , dimodochè

$$\frac{a}{\rho} - \frac{a}{r} \cot\theta = 1. \quad (12)$$

Per le formole fondamentali, relative alle direzioni, si ha

$$\frac{\delta\alpha}{ds} = -\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{\delta\beta}{ds} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{\delta\gamma}{ds} = \frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}, \quad (13)$$

e si vede che dev'essere costante anche θ affinchè la normale principale di (M) coincida in ogni punto con quella di (M_1) . Ed ora si noti che l'equazione (12) definisce una curva di Bertrand, per la quale si ha $b = -a \cot\theta$. È chiaro *a priori* che anche (M_1) è una curva di Bertrand, per la quale a e b debbono avere gli stessi valori. Del resto dalle formole (11) e (13) si deduce

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r}, \quad \frac{a^2 + b^2}{\rho_1} = a - b \frac{r}{\rho};$$

e poichè, scambiando fra loro le due curve, il rapporto $ds : ds_1$ ha il valore $\sqrt{a^2 + b^2} : r_1$, si vede che dev'essere $rr_1 = a^2 + b^2$, proprietà già notata nel caso dei circoli storti. Si verifica poi facilmente che l'equazione (10) appartiene anche ad (M_1) . La corrispondenza fra le due curve diventa illusoria per le curve a torsione costante, giacchè, per a nullo, (M) ed (M_1) coincidono. Quando poi una delle curve tende a diventare un'elica, l'altra si allontana all'infinito. Finalmente è utile osservare, nel caso generale, che *i triedri fondamentali delle due curve sono rigidamente legati fra loro*.

9. Dalla precedente questione si è naturalmente condotti allo studio delle superficie formate dalle normali principali ad una curva. Se questa si prende come curva fondamentale, le formole (37) del precedente capitolo debbono essere soddisfatte per $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, e però si ha

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\operatorname{sen}\tau \cos\tau}{\rho}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\cos^2\tau}{\rho},$$

cioè $\tau = \varepsilon$ e $p = -h \cot \varepsilon$, come si è già osservato (IX, 16) per altra via. Affinchè sulla superficie esistano due linee, che ammettano le generatrici come normali principali, è necessario che ciascuna di esse sia una curva di Bertrand, ed in generale non potrà esserne una terza; ma se questa esiste, dovranno esserne infinite altre, che son tutte le eliche circolari definite dalle infinite coppie di valori costanti di ρ e di r , soddisfacenti alla (10) per una data coppia di valori di a e di b . Una delle infinite eliche ($\rho = \infty, r = b$) si riduce ad una retta, asse comune degli infiniti cilindri circolari sui quali son tracciate le eliche stesse, e linea di stringimento ($\tau = 0$) della superficie. Intanto, poichè il parametro distributore p ha il valore costante b , anche il rapporto fra la distanza e l'angolo di due generatrici qualunque si conserva costantemente uguale a b . Dunque (IX, 7, h) *la superficie è un elicoide a piano direttore.*

10. Ad un'altra proprietà caratteristica delle curve di Bertrand si giunge cercando se può accadere che una retta rigidamente legata al triedro fondamentale d'una curva resti normale alle traiettorie dei suoi punti. Evidentemente una tale retta deve appartenere al complesso delle normali, trovato nell'ultimo paragrafo del capitolo precedente, e però fra le sue coordinate, che si suppongono costanti, deve intercedere la relazione

$$\frac{\xi}{r} - \frac{\eta}{\rho} + \alpha = 0 . \quad (14)$$

Se le curvatures variano, e se varia ad un tempo il loro rapporto, come accade in generale, non si può soddisfare alla (14) se non prendendo $\alpha = 0, \xi = 0, \eta = 0$. Queste equazioni rappresentano le normali alla curva e le altre perpendicolari alla tangente, situate nel piano rettificante. Un primo caso eccezionale si presenta quando le curvatures, pur variando, si conservano in un rapporto costante, nel qual caso la curva è un'elica non circolare. Si soddisfa allora alla (14) prendendo $\alpha = 0, \xi \cos \varepsilon + \eta \sin \varepsilon = 0$, e però le parallele al piano normale, che incontrano la generatrice, sono le sole rette che rispondano alla questione. Ma se l'elica è circolare la condizione (14) non si scinde, ed ogni retta del complesso delle normali gode della proprietà enunciata. Del resto questi casi rientrano nel caso eccezionale unico delle curve di Bertrand. Infatti, quando fra le curvatures intercede il vincolo (10), si soddisfa alla (14) prendendo

$$\xi = -b\alpha, \quad \eta = a\alpha, \quad (15)$$

e non altrimenti. Di queste equazioni la seconda rappresenta il complesso delle rette che incontrano la parallela g , condotta da M_1 alla binormale di (M) ; ed alla prima si può sostituire l'equazione

$$a\xi + b\eta = 0, \quad (16)$$

che rappresenta il complesso delle rette che si appoggiano sulla parallela g

condotta per M alla binormale di (M_1) . Dunque *quelle rette rigidamente legate al triedro fondamentale d'una curva di Bertrand, che incontrano g e g_1 , restano normali alle traiettorie di tutti i loro punti*. In particolare per ogni circolo storto le rette che rispondono alla questione *son quelle che si appoggiano sulla tangente e sull'asse polare*. Per le eliche non circolari g_1 sta all'infinito nel piano normale e g è la generatrice del cilindro. Invece un'elica circolare si può in infiniti modi considerare come una curva di Bertrand, e le infinite congruenze che in tal modo si ottengono costituiscono appunto l'intero complesso delle normali. Finalmente nel caso delle curve a torsione costante non si può più sostituire l'equazione (16) ad una delle (15); queste diventano $\eta=0, \xi=-r\alpha$, e non rappresentano retto che si appoggiano su due rette distinte. Ciò avviene perchè, nel caso considerato, (M_1) coincide con (M) , e le rette g e g_1 tendono a confondersi con la binormale, in guisa che il rapporto del loro angolo alla loro distanza tende ad un limite, che misura la torsione della curva. Le rette che rispondono alla questione sono dunque allora *tutte le tangenti ad una certa superficie storta, lungo la binormale*.

11. Le linee di Bertrand sono curve particolarissime fra le linee intrinsecamente definite dall'equazione

$$\frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{\rho r} = \frac{P}{\rho} + \frac{Q}{r} . \quad (17)$$

Queste si presentano come eccezionali quando si cerca *se esistano sviluppabili fra le superficie generate dalle rette rigidamente connesse al triedro fondamentale*. Si sa dal precedente capitolo che le coordinate (costanti) di tali rette debbono soddisfare alla condizione

$$\delta\alpha\delta\xi + \delta\beta\delta\eta + \delta\gamma\delta\zeta = 0 ,$$

che prende appunto la forma (17) quando si fa uso delle formole fondamentali, purchè si ponga

$$\frac{\beta\eta}{A} = \frac{\alpha\xi}{B} = -\frac{\alpha\eta + \beta\xi}{C} = \frac{\alpha\beta}{P} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{Q} . \quad (18)$$

Se fra le curvatures non sussiste alcun vincolo del tipo (17), conviene che si annullino nelle (18) tutti i numeratori, e siano conseguentemente soddisfatte le condizioni $\alpha=1, \beta=0, \eta=0$, le quali definiscono *le parallele alla tangente, tracciate nel piano rettificante*. Adunque son queste, in generale, *le sole generatrici di sviluppabili*; ma altre simili rette possono esistere quando la curva appartiene alla classe definita dall'equazione (17). Effettivamente, se non sono tutti nulli i coefficienti della detta equazione, eliminando ξ ed η fra le (18) si ottengono le relazioni

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\alpha\beta = 0 , \quad P(\beta^2 + \gamma^2) = Q\alpha\beta , \quad (19)$$

per le quali si vede che esistono, in generale, *altre quattro generatrici di svi-*

luppabili parallele alle intersezioni d'un certo cono quadrico con una coppia di piani: il cono, che ha il vertice sulla curva, tocca, lungo la tangente, il piano osculatore, ed i piani passano per la normale principale. Tuttavia si noti che, se A, B, C sono nulli, svanisce la prima equazione (19), l'equazione (17) rappresenta un'elica, e le generatrici del cono rispondono tutte alla questione, poichè dalle (18) si trae ancora $\xi = 0, \eta = 0$.

12. In ciò che precede, affermando che le (19) ammettono un numero limitato di soluzioni comuni, si è tacitamente supposto che il secondo membro della (17) non sia, nel senso algebrico, un divisore del primo. Nel caso contrario l'equazione si riduce alla forma (10), e rappresenta una curva di Bertrand. Siccome poi a P ed a Q si possono attribuire valori arbitrarii, purchè non entrambi nulli, anche per queste curve, *come per le eliche*, infinite altre rette rispondono alla questione proposta. Scritte le (19) sotto la forma

$$(a\alpha + b\beta)(P\alpha + Q\beta) = 0 \quad , \quad \alpha(P\alpha + Q\beta) = P \quad ,$$

si vede subito che si può ad esse in due ben diversi modi soddisfare, annullando cioè l'uno o l'altro fattore del primo membro della prima equazione. Quando si pone uguale a zero il secondo fattore, è $P = 0$, in virtù della seconda equazione, e però anche $\beta = 0$. Inoltre

$$A = Pa = 0 \quad , \quad B = Qb \quad , \quad C = Pb + Qa = Qa \quad .$$

Ciò premesso, le (18) diventano

$$\frac{\xi}{b} = -\frac{\eta}{a} = \frac{\gamma^2}{\alpha} \quad .$$

I numeratori son tutti nulli solo quando sian tali γ ed η : si ritrovano allora *le infinite parallele alla tangente, tracciate nel piano rettificante*. Nel caso contrario le ultime equazioni definiscono una congruenza, dalla quale la condizione $\beta = 0$ stacca un paraboloido iperbolico ϖ , rappresentato dalle equazioni

$$a\xi + b\eta = 0 \quad , \quad \zeta = -b\gamma \quad , \quad \beta = 0 \quad .$$

Annullando invece il fattore $a\alpha + b\beta$, dalle (18) si trae

$$\eta = a\alpha \quad , \quad \gamma(\zeta + b\gamma) = 0 \quad .$$

Per $\gamma = 0$ si ottengono *infinite altre rette parallele, situate in un piano parallelo al piano rettificante*. Se γ non si pone uguale a zero, le equazioni

$$\eta = a\alpha \quad , \quad \zeta = -b\gamma \quad , \quad a\alpha + b\beta = 0$$

definiscono le generatrici d'un altro paraboloido ϖ_1 , parallele ad un piano che passa per la normale principale. È dunque *caratteristica* per le curve di Bertrand *l'esistenza di due paraboloidi iperbolici, rigidamente connessi al triedro fondamentale, e tali che le loro generatrici d'un sistema restano tan-*

genti a certe curve dello spazio. L'osservazione finale del § 8 ci spiega perchè nella precedente ricerca siam pervenuti a *due* paraboloidi ed a *due* sistemi di rette parallele: è chiaro, infatti, che il paraboloido ω_1 non è, per così dire, che il paraboloido ω relativo a quella curva di Bertrand che, per le cose dette nel § 8, ha le stesse normali principali della curva considerata. Osserviamo, per finire, che i due paraboloidi coincidono per le curve a torsione costante, e degenerano (IX, 7, *f*) in due parabole nel caso dei cerchi storti: una parabola è situata nel piano osculatore, ha il vertice sulla curva ed il fuoco nel centro di curvatura; l'altra è situata nel piano normale, ha il fuoco sulla curva ed il vertice nel centro di curvatura.

XI. TEORIA GENERALE DELLE SUPERFICIE.

1. Geodetiche ed assintotiche. Le proprietà intrinseche d'una superficie nel dominio di ciascun punto M sono strettamente legate a quelle delle curve che passano per M . In seguito (XV, 1) si vedrà che le tangenti a tutte queste curve stanno in un piano, che si chiama *piano tangente* alla superficie in M . La *normale* alla superficie, cioè la perpendicolare elevata per M al piano tangente, è normale a tutte le curve che passano per M , e può per alcune essere la binormale, per altre la normale principale. Le curve che in ogni loro punto hanno la binormale coincidente con la normale alla superficie si dicono *assintotiche*; quelle che ammettono la normale stessa come normale principale (*cf.* IX, 10) si chiamano *geodetiche*. In altri termini, se si considera la sviluppabile circoscritta ad una superficie, lungo una data curva, cioè l'involuppo dei piani che toccano la superficie nei punti della curva, si può dire che la sviluppabile circoscritta lungo un'assintotica ammette questa curva come spigolo di regresso, mentre la sviluppabile circoscritta lungo una geodetica è la rettificante di tale curva. Per ben rendersi conto della differenza essenziale fra le due specie di curve è utile materializzare la superficie attribuendole uno spessore, ed immaginarsi d'altra parte la curva come una striscia tagliata nella sviluppabile delle tangenti, cioè in quella successione di piani ai quali si può (IX, 4) dire che maggiormente appartengono i successivi elementi lineari della curva. Quando sopra una superficie si vuol collocare una geodetica, la striscia deve penetrare normalmente nello spessore della superficie stessa, mentre per collocare un'assintotica basta adagiarla sulla superficie, sulla quale essa starà come una striscia piana sul proprio piano. Sia ψ l'angolo di cui la normale alla superficie, agli occhi di un osservatore posto sulla parte positiva della tangente, deve ruotare nel senso degli indici d'un orologio per andare a coincidere con la normale

principale. Presto vedremo frequentemente comparire nei nostri calcoli le quantità

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\cos \psi}{\rho}, \quad \mathcal{Q} = \frac{\sin \psi}{\rho},$$

che si chiamano *curvatura normale* e *curvatura geodetica*, e dovremo sempre tener presente che *le geodetiche sono caratterizzate dal costante annullarsi della curvatura geodetica*, mentre *le assintotiche sono caratterizzate dal costante annullarsi della curvatura normale*. Qui si noti che le sole rette hanno la proprietà di essere ad un tempo assintotiche e geodetiche su qualunque superficie.

2. Linee di curvatura. Una linea tracciata sopra una superficie si dice *di curvatura* se le normali alla superficie, lungo la linea stessa, formano una sviluppabile. Già (IX, 15) si è visto che occorre e basta, affinché ciò avvenga, che la derivata di ψ rispetto all'arco sia uguale alla torsione della curva, e però, se chiamiamo *torsione geodetica* la quantità

$$\mathcal{T} = \frac{d\psi}{ds} - \frac{1}{r},$$

possiamo affermare che *le linee di curvatura sono caratterizzate dal costante annullarsi della torsione geodetica*. In particolare tutte le linee tracciate sopra una sfera sono linee di curvatura di tale superficie, perchè le normali concorrono nel centro; e più particolarmente ancora ogni linea piana è linea di curvatura ed insieme assintotica del piano in cui giace. Tornando al caso generale osserviamo che (IX, 15) *se una curva è linea di curvatura su due superficie, queste s'incontrano lungo la linea stessa sotto un angolo costante; e se due superficie s'incontrano ad angolo costante, la linea d'intersezione non può essere linea di curvatura sopra una delle superficie senza esser tale anche sull'altra*. Ne segue che, *se una linea di curvatura è piana, il suo piano taglia la superficie ad angolo costante*; ed altrettanto si può dire d'una linea sferica qualunque e della sfera su cui giace. Reciprocamente, *se un piano o una sfera tagliano una superficie sotto un angolo costante, l'intersezione è linea di curvatura sulla superficie che si considera*. Finalmente si osservi che, se per una linea di curvatura è costante l'angolo ψ , la linea è necessariamente piana. In particolare ($\psi = 0$) *ogni linea geodetica di curvatura è piana*, ed il suo piano taglia la superficie ad angolo retto.

3. Formole fondamentali per le curve tracciate sopra una superficie. Per lo studio intrinseco d'una linea tracciata sopra una superficie è utile prendere come asse z la normale alla superficie in un punto mobile M , ritenendo come asse x la tangente alla curva. Se nelle condizioni (IX, 4) d'immobilità

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{z'}{\rho} - 1, \quad \frac{dy'}{ds} = \frac{z'}{r}, \quad \frac{dz'}{ds} = -\frac{x'}{\rho} - \frac{y'}{r},$$

relative al triedro fondamentale della curva, s'introducono le nuove coordinate

$$x = x' \quad , \quad y = y' \cos \psi - z' \sin \psi \quad , \quad z = y' \sin \psi + z' \cos \psi \quad ,$$

si ottengono le relazioni

$$\frac{dx}{ds} = \mathcal{N}z - \mathcal{C}y - 1 \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \mathcal{C}x - \mathcal{E}z \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \mathcal{E}y - \mathcal{N}x \quad . \quad (1)$$

Evidentemente le formole fondamentali, che servono a far conoscere le variazioni assolute delle coordinate x, y, z d'un punto qualunque, mobile insieme ad M , sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \mathcal{N}z + \mathcal{C}y + 1 \quad , \\ \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \mathcal{C}x + \mathcal{E}z \quad , \\ \frac{\delta z}{ds} = \frac{dz}{ds} - \mathcal{E}y + \mathcal{N}x \quad , \end{array} \right. \quad (2)$$

ed è chiaro che sussistono anche quando x, y, z hanno il significato di coseni direttori, purchè dalla prima si tolga il termine costante

4. Teoremi di Meusnier e di Bonnet. Quando dal punto M si passa ad un punto infinitamente vicino M' , la variazione della coordinata z d'un punto fisso qualunque ha lo stesso valore per tutte le curve della superficie, che si toccano in M , perchè rappresenta la differenza fra le distanze del punto fisso ai piani che toccano la superficie in M ed in M' , ed è per conseguenza la stessa per tutte le curve che hanno in comune l'elemento MM' . Segue dunque dalla terza formola (1) che ciascuna delle quantità \mathcal{E} ed \mathcal{N} conserva un valore invariato per tutte le curve della superficie, tangenti in M ad Mx . Nell'invariabilità di \mathcal{E} sta il *teorema di Bonnet*, dal quale si deduce che, a prescindere dal segno, *la torsione geodetica d'una curva non differisce dalla torsione assoluta della geodetica tangente*. Il *teorema di Meusnier* afferma invece l'invariabilità di \mathcal{N} , ed ha importanti conseguenze. Prima di tutto, se ψ ha lo stesso valore ($\geq \frac{1}{2}\pi$) per due curve tangenti, anche i valori di ρ debbono essere uguali, cioè *due curve che, in un punto della superficie, sono osculate da uno stesso piano, hanno curvature (assolute o geodetiche) uguali*, purchè il comune piano osculatore non sia il piano tangente alla superficie. Fra tutte le curve che toccano in M una data curva si consideri la sezione piana normale, fatta nella superficie dal piano zx . Se ρ_0 è il suo raggio di curvatura, il teorema di Meusnier dà per \mathcal{N} il valore $1:\rho_0$. Dunque *la curvatura normale d'una linea qualunque, tracciata sopra una superficie, è la curvatura della sezione piana normale, fatta nella superficie tangenzialmente alla linea stessa*. Quanto alla curvatura geodetica, si noti che, in virtù dello stesso teorema di Meusnier, nel cilindro che proietta ortogonalmente la curva sul piano tangente, la curvatura della sezione normale,

tangente alla curva stessa, è appunto $\frac{\text{sen}\psi}{\rho}$. Dunque *la curvatura geodetica d'una linea, tracciata sopra una superficie, è la curvatura della proiezione della curva sul piano tangente*. Finalmente per l'invariabilità di \mathcal{N} si ha $\rho = \rho_0 \cos\psi$, e però *il centro di curvatura di qualunque linea d'una superficie, in un punto M, si ottiene proiettando sul piano osculatore della curva stessa il centro di curvatura di quella sezione piana normale, che tocca la curva in M*. Questa costruzione non regge per le curve tangenti alle assintotiche, giacchè nelle assintotiche \mathcal{N} è nulla per l'annullarsi di $\cos\psi$, ma ρ ha un valore qualunque. Se una curva tocca un'assintotica in un punto M, senza osculare il piano tangente alla superficie, $\cos\psi$ non è nullo, e però dev'essere nulla la flessione; ma quando la curva è osculata dal piano tangente, la sua flessione è suscettibile di qualunque valore, generalmente diverso da quello che ha la flessione dell'assintotica tangente.

5. L'invariabilità di \mathcal{N} e di \mathcal{T} , per tutte le curve che hanno una data tangente, risulta più agevolmente ancora dallo studio delle normali alla superficie nel dominio d'un punto M. Quando le formole (2), relative alle direzioni, si applicano alla direzione (0, 0, 1), si trova che la normale in M' ha i coseni direttori $-\mathcal{N}ds, \mathcal{T}ds, 1$, e ciò basta per essere sicuri che ciascuna delle quantità \mathcal{N} e \mathcal{T} ha un sol valore per tutte le curve che ammettono in comune l'elemento MM'. Si vede inoltre che, nel passare da M ad M', lo spostamento angolare del piano tangente alla superficie risulta da due rotazioni infinitesime, delle quali una, proporzionale alla curvatura normale, si esegue senza che il piano ruoti intorno ad MM', mentre l'altra, proporzionale alla torsione geodetica, consiste appunto in una rotazione intorno alla tangente. In modo analogo si giunge all'interpretazione della curvatura geodetica, considerando invece la direzione (1, 0, 0). Si trova che la direzione della tangente in M' è definita dai coseni $1, -\mathcal{Q}ds, \mathcal{N}ds$, e però la tangente, mentre partecipa al moto del piano tangente, ruota in questo piano per un angolo $\mathcal{Q}ds$, nel senso opposto a quello degli indici d'un orologio, agli occhi d'un osservatore collocato sulla parte positiva della normale. In altri termini *la curvatura geodetica è proporzionale alla proiezione, sul piano tangente, dell'angolo di due tangenti infinitamente vicine, come la torsione geodetica è proporzionale alla proiezione, sul piano normale alla curva, dello spostamento angolare della normale alla superficie*. Ora è chiaro che \mathcal{Q} dipende non dalla sola tangente in M, come \mathcal{N} e \mathcal{T} , ma benanche dalla tangente in M', vale a dire che il valore di \mathcal{Q} è unico per tutte le curve della superficie, osculate in M da uno stesso piano, ma non per tutte le curve tangenti fra loro in M: a questa circostanza si deve se da ogni punto d'una superficie escono geodetiche ($\mathcal{Q} = 0$) in tutte le direzioni, mentre le linee di curvatura ($\mathcal{T} = 0$) e le assintotiche ($\mathcal{N} = 0$), che passano per un dato punto M, sono, come ben presto si vedrà, in numero limitato, appunto perchè imporre, in M, il valore di \mathcal{T} o di \mathcal{N} ad una curva, significa imporre il valore stesso

alle infinite curve che toccano in M la curva data, qualunque sia il piano che le oscula.

6. Le considerazioni svolte nei primi quattro paragrafi dell'ottavo capitolo sono applicabili immediatamente ai sistemi di curve tracciate sopra una superficie qualunque, e però si può dire che da ogni funzione dei punti d'una superficie sorge la rappresentazione analitica d'un sistema semplicemente infinito di curve; poi, definito il quoziente differenziale della funzione in una direzione qualunque, e posti a fondamento d'un sistema ortogonale di *coordinate curvilinee*, secondo il § 7 del citato capitolo, i due sistemi di curve definiti dalle funzioni q_1 e q_2 , si è condotti ad esprimere la distanza fra due punti infinitamente vicini mediante la formola

$$ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2,$$

in cui le Q sono funzioni delle q ; e si riconosce che i *quozienti differenziali* nelle direzioni delle linee coordinate dipendono nel seguente modo dalle *derivate* relative alle q :

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{1}{Q_1} \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{Q_2} \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Ciò premesso, e posto

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2}, \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1}, \quad (3)$$

la condizione

$$\frac{\partial Q_2 v}{\partial q_1} = \frac{\partial Q_1 u}{\partial q_2},$$

necessaria e sufficiente per l'esistenza d'una funzione f , i cui quozienti differenziali siano le funzioni prescritte u e v , si trasforma in

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1 \right) u = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2 \right) v. \quad (4)$$

Ne segue che per qualunque funzione si deve avere

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} = \mathcal{Q}_2 \frac{\partial}{\partial s_2} - \mathcal{Q}_1 \frac{\partial}{\partial s_1}. \quad (5)$$

È questa una relazione assai utile nell'analisi intrinseca delle superficie.

7. Ora, stabilito sulla superficie un sistema di coordinate curvilinee ortogonali, dirigiamo gli assi Mx ed My secondo le tangenti alle linee coordinate q_1 e q_2 che passano per M . Quando M tende a spostarsi secondo la linea q_1 , le condizioni

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = \mathcal{E}z - \mathcal{G}y - 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s_1} = \mathcal{G}x - \mathcal{E}z, \quad \frac{\partial z}{\partial s_1} = \mathcal{F}y - \mathcal{D}x \quad (6)$$

sono necessarie per l'immobilità del punto (x, y, z) . Per trovare le condizioni

analoghe nell'ipotesi che M tenda a spostarsi secondo la linea q_2 , bisogna cambiare x ed y in y e $-x$, rispettivamente, ed attribuire a \mathcal{C} , \mathcal{Q} , \mathcal{Q}' i loro valori, relativi alla detta linea q_2 , dimodochè si ha

$$\frac{\partial x}{\partial s_2} = \mathcal{Q}'y + \mathcal{C}'z, \quad \frac{\partial y}{\partial s_2} = \mathcal{Q}'x - \mathcal{C}'z - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial s_2} = -\mathcal{C}'x - \mathcal{Q}'y. \quad (7)$$

Qui importa notare che per x, y e z nulli, quando cioè si considera l'istante del passaggio di M per la posizione fissa (x, y, z) , le formole (6) e (7) danno

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = \frac{\partial y}{\partial s_2} = -1, \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} = \frac{\partial y}{\partial s_1} = \frac{\partial z}{\partial s_1} = \frac{\partial z}{\partial s_2} = 0.$$

Se, continuando a supporre nulli x, y, z , si applica alle (6) l'operazione $\frac{\partial}{\partial s_2}$, tenendo conto delle (7), si ottiene

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2} = \mathcal{Q}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s_1 \partial s_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s_1 \partial s_2} = -\mathcal{C}.$$

Applicando invece alle (7) l'operazione $\frac{\partial}{\partial s_1}$ si trova, in virtù delle (6),

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s_2 \partial s_1} = \mathcal{Q}', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s_2 \partial s_1} = \mathcal{C}'.$$

Ciò premesso, basta esprimere che la relazione (5) è soddisfatta dalle funzioni x ed y per ottenere i valori delle curvature geodetiche delle due linee, espressi mediante le (3):

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1, \quad \mathcal{Q}' = \mathcal{Q}_2.$$

Applicando a z la medesima relazione si ottiene invece $\mathcal{C} + \mathcal{C}' = 0$, e si dimostra così il seguente teorema di Bonnet: *le torsioni geodetiche di due linee, che si tagliano ad angolo retto, sono, nel punto d'incontro, uguali ed opposte.*

8. Osserviamo che, quando si assume una geodetica come linea coordinata, per esempio come linea q_1 , si ha $\mathcal{Q}_1 = 0$, e però \mathcal{Q}_1 dev'essere, in virtù di (3), funzione della sola q_1 . Ne segue che, sostituendo a q_1 una conveniente funzione di q_1 , si può sempre supporre $\mathcal{Q}_1 = 1$, e così il quadrato dell'elemento lineare viene espresso da $dq_1^2 + \mathcal{Q}_2^2 dq_2^2$. La distanza fra due punti M ed M' della geodetica considerata, computata lungo la geodetica stessa, è la differenza assoluta fra i valori di q_1 in M ed M' , e però *due qualunque traiettorie ortogonali d'un sistema di geodetiche staccano archi uguali dalle infinite geodetiche*, proprio come accade nel piano per le traiettorie ortogonali di qualunque sistema di rette. Questa ed altre proprietà si debbono al fatto che *le geodetiche sono, per così dire, le rette della superficie*. Infatti, quando si va da M ad M' seguendo, non la geodetica, ma un'altra linea, si percorre un tratto di maggiore lunghezza, perchè q_2 non si mantiene costante se non lungo la geodetica. Così ci spieghiamo perchè *la geodetica segna il più breve*

cammino fra due punti non troppo lontani d'una superficie. Del resto questa proprietà apparisce evidente se si riflette che, per le cose dette nel § 5, un punto che descrive una curva qualunque, sopra una superficie, subisce ad ogni istante, sulla superficie stessa, una deviazione $\mathcal{Q}ds$. Ora, se si vuole che il punto vada per la via più breve, bisogna pure, per impedirgli di deviare, supporre che sia costantemente $\mathcal{Q} = 0$. In tal modo si spiega anche perchè *un filo, teso sopra una superficie, si dispone sempre in forma di geodetica*; ed è questo un fatto notevole, in quanto che suggerisce un mezzo pratico semplicissimo per segnare le geodetiche sopra una superficie qualunque. Senonchè, materializzata la superficie, in certi punti accade che il filo se ne stacca per tendersi nello spazio in forma di retta, ed allora nei punti stessi bisognerà immaginare che si siano praticati altrettanti fori, in modo da permettere al filo di attraversare la superficie per appoggiarsi or sull'una or sull'altra faccia. Come si assegnino *a priori* i posti in cui si deve bucare la superficie risulta da un'osservazione ovvia, cioè dal notare che in essi cambia segno la flessione del filo, dimodochè, essendo anche $\mathcal{T}\mathcal{C} = 0$, i punti cercati sono fra quelli *nei quali la geodetica tocca qualche assintotica.*

9. Formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle superficie.

Dopo i risultati del § 7, se con \mathcal{N}_1 ed \mathcal{N}_2 si rappresentano le curvature $\mathcal{N}\mathcal{C}$ ed $\mathcal{N}\mathcal{C}'$, le condizioni (6) e (7) prendono la forma definitiva

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial s_1} = \mathcal{N}_1 z - \mathcal{Q}_1 y - 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s_1} = \mathcal{Q}_1 x - \mathcal{C} z, \quad \frac{\partial z}{\partial s_1} = \mathcal{C} y - \mathcal{N}_1 x, \\ \frac{\partial x}{\partial s_2} = \mathcal{Q}_2 y - \mathcal{C} z, \quad \frac{\partial y}{\partial s_2} = \mathcal{N}_2 z - \mathcal{Q}_2 x - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial s_2} = \mathcal{C} x - \mathcal{N}_2 y. \end{array} \right. \quad (8)$$

Son queste condizioni *necessarie per l'immobilità del punto* (x, y, z) , ed anche *sufficienti*, giacchè qualunque spostamento infinitesimo dell'origine M sulla superficie si può sempre far risultare da due spostamenti lungo le linee coordinate. Se poi si vogliono, più generalmente, le variazioni assolute, nello spazio, delle coordinate d'un punto mobile con M, quando M si sposta sulla superficie nella direzione definita dall'angolo ω con Mx , basterà prendere, come nelle (2), le differenze fra i primi ed i secondi membri delle formole (8), per applicar poi l'operazione

$$\frac{\delta}{ds} = \cos \omega \frac{\delta}{\partial s_1} + \sin \omega \frac{\delta}{\partial s_2}. \quad (9)$$

Oltre le (8) ha grande importanza un'altra terna di relazioni, necessarie e sufficienti perchè le (8) possano essere soddisfatte da tre funzioni x, y, z di q_1 e q_2 . Affinchè, per esempio, esista la funzione z , occorre e basta, in virtù di (5), che si abbia

$$\frac{\partial}{\partial s_2} (\mathcal{C} y - \mathcal{N}_1 x) - \frac{\partial}{\partial s_1} (\mathcal{C} x - \mathcal{N}_2 y) = \mathcal{Q}_2 (\mathcal{C} x - \mathcal{N}_2 y) - \mathcal{Q}_1 (\mathcal{C} y - \mathcal{N}_1 x),$$

qualunque siano x, y, z ; e poichè al primo membro si può, in virtù delle stesse (8), dar la forma

$$\left(\frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial s_2} + \mathcal{C} \mathcal{Q}_1 - \mathcal{N}_1 \mathcal{Q}_2\right) y - \left(\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial s_1} + \mathcal{C} \mathcal{Q}_2 - \mathcal{N}_2 \mathcal{Q}_1\right) x,$$

si vede che le cinque curvatures $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{T}, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ debbono soddisfare alle prime due relazioni della terna

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial s_2} + 2 \mathcal{C} \mathcal{Q}_1 = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \mathcal{Q}_2, \\ \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial s_1} + 2 \mathcal{C} \mathcal{Q}_2 = (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \mathcal{Q}_1, \\ \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_1^2 + \mathcal{Q}_2^2 = \mathcal{T}^2 - \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2, \end{cases}$$

ed anche alla terza, che si ottiene operando analogamente su x o su y . Son queste le *formole di Codazzi*: l'ultima porta più specialmente il nome di Gauss, e si riduce, nel caso del piano, alla nota (VIII, 10) relazione di Lamé.

10. Teorema di Eulero. Come variano le curvatures normali e le torsioni geodetiche intorno ad un punto? Distinguiamo con un indice ω tutto ciò che si riferisce ad una curva qualunque, che passi per M tangenzialmente ad una retta inclinata di ω sull'asse Mx . Per questa curva la terza formola (1) diventa

$$\frac{dz}{ds} = (-x \operatorname{sen} \omega + y \operatorname{cos} \omega) \mathcal{T}_\omega - (x \operatorname{cos} \omega + y \operatorname{sen} \omega) \mathcal{N}_\omega,$$

e d'altra parte si ha, osservando le (8),

$$\frac{dz}{ds} = (\mathcal{T} y - \mathcal{N}_1 x) \operatorname{cos} \omega + (\mathcal{T} x - \mathcal{N}_2 y) \operatorname{sen} \omega.$$

Identificando si ottiene

$$\mathcal{N}_\omega \operatorname{cos} \omega + \mathcal{T}_\omega \operatorname{sen} \omega = \mathcal{N}_1 \operatorname{cos} \omega - \mathcal{T} \operatorname{sen} \omega, \quad (10)$$

$$\mathcal{N}_\omega \operatorname{sen} \omega - \mathcal{T}_\omega \operatorname{cos} \omega = \mathcal{N}_2 \operatorname{sen} \omega - \mathcal{T} \operatorname{cos} \omega,$$

e se ne trae

$$\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N}_1 \operatorname{cos}^2 \omega - 2 \mathcal{T} \operatorname{cos} \omega \operatorname{sen} \omega + \mathcal{N}_2 \operatorname{sen}^2 \omega. \quad (11)$$

È noto che da una siffatta forma si può sempre, ma generalmente in un modo solo, fare sparire il termine rettangolo, mercè una conveniente rotazione degli assi, intorno ad M , nel piano tangente. Allora, ed allora soltanto, essendo $\mathcal{T} = 0$, le due curve coordinate sono linee di curvatura. Adunque, come ha trovato Monge, *passano per ogni punto d'una superficie due sole linee di curvatura, perpendicolari fra loro*. Noi chiameremo *raggi principali* di

curvatura, e rappresenteremo sempre con R_1 ed R_2 , i raggi di curvatura di quelle sezioni normali, che toccano le linee di curvatura, diguisachè, orientati gli assi tangenzialmente a queste linee, la (11) diventa

$$\mathfrak{T}_\omega = \frac{\cos^2 \omega}{R_1} + \frac{\sin^2 \omega}{R_2} . \quad (12)$$

Questa importante formola di Eulero, sussidiata dal teorema di Meusnier, mostra che in ogni punto d'una superficie basta che sia nota la curvatura di due linee per conoscere quella di qualunque altra curva.

11. In punti speciali, detti *ombelichi*, può accadere che sia $R_1 = R_2$, ed allora si ha $\mathfrak{T} = 0$ in tutte le direzioni, ed \mathfrak{T}_ω non dipende da ω , vale a dire che *negli ombelichi concorrono infinite linee di curvatura*, e la curvatura normale ha un valore unico per tutte le curve che passano in siffatti punti. Può una superficie essere composta tutta di ombelichi? Per rispondere alla questione si assumano a linee coordinate le linee di curvatura, e si noti che le prime due formole di Codazzi diventano

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \mathfrak{G}_2 , \quad \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \mathfrak{G}_1 ;$$

queste mostrano che, se in ogni punto si avesse $R_1 = R_2$, il comune valore di R_1 ed R_2 sarebbe una *costante* R . Ciò premesso, basta osservare che le condizioni (8) sono soddisfatte da $x=0, y=0, z=R$, per convincersi che i punti della superficie son tutti alla distanza R da un punto fisso, vale a dire che *l'unica superficie, su cui ogni punto è un ombelico, è la sfera*. Ne segue che, oltre la sfera (*cfr.* § 2), *non esistono altre superficie per le quali ogni linea è linea di curvatura*.

12. Tornando alla (12) osserviamo che, se R_1 ed R_2 hanno lo stesso segno, \mathfrak{T}_ω conserva un segno invariato al variare di ω , e però non si annulla mai. Dunque per tali punti, che si dicono *ellittici*, non passano assintotiche reali. Quando invece R_1 ed R_2 hanno segni opposti, \mathfrak{T}_ω si annulla in due direzioni, definite dalla formola

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}} . \quad (13)$$

Allora il punto si dice *iperbolico*, e si vede che *per ogni punto iperbolico passano due assintotiche reali*, egualmente inclinate sulle linee di curvatura. Intanto, come dalle (10) si è dedotta la (11), così possiamo anche ricavarne la formola di Bonnet

$$\mathfrak{T}_\omega = \mathfrak{T} \cos 2\omega + \frac{1}{2} (\mathfrak{T}_{\omega_1} - \mathfrak{T}_{\omega_2}) \sin 2\omega , \quad (14)$$

che ci dice come varia la torsione geodetica intorno a ciascun punto. La legge di variazione prende la forma semplicissima

$$\mathfrak{T}_\omega = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin \omega \cos \omega \quad (15)$$

se l'angolo ω si computa a partire da una linea di curvatura. In particolare, quando in (15) si pongono per ω i valori definiti dalla (13), si trova che il raggio di torsione delle assintotiche è uguale a $\sqrt{-R_1 R_2}$: è questo un notevole *teorema di Enneper*.

13. Indicatrice di Dupin. Per ben rendersi conto del modo di comportarsi d'una superficie, intorno a ciascuno dei suoi punti, è utile ricorrere ad una rappresentazione geometrica della formola (12). Sulla tangente definita dall'angolo ω si prenda il segmento MP uguale alla radice quadrata del valore assoluto del raggio di curvatura normale. Il luogo dei punti (reali) P si chiama *indicatrice di Dupin*. Le coordinate di P nel piano tangente sono

$$x = \frac{\cos \omega}{\sqrt{\pm \mathfrak{R}_\omega}} \quad , \quad y = \frac{\sin \omega}{\sqrt{\pm \mathfrak{R}_\omega}} \quad ,$$

e però si ha

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 1 \quad (16)$$

come equazione del luogo dei punti P, reali o immaginari. Nei punti ellittici della superficie l'equazione (16) rappresenta due ellissi (III, 4), delle quali una sola è reale, ed è per conseguenza l'indicatrice, che negli ombelichi si riduce ad un circolo. Nei punti iperbolici l'equazione (16) rappresenta invece due iperboli reali, con centro, assi ed assintoti comuni. Ora è chiaro che le linee di curvatura si possono definire come quelle che in ogni loro punto toccano un asse dell'indicatrice di Dupin, mentre le assintotiche toccano, in ciascun punto, un assintoto dell'indicatrice stessa. Così si spiega perchè le assintotiche solcano le sole regioni composte di punti iperbolici, e come intorno a ciascuno di questi esse determinino due regioni angolari, per una delle quali la curvatura normale è positiva, mentre per l'altra è negativa. Intanto, se si fissa per un istante in M l'origine degli archi d'una curva qualunque, le formole (1) mostrano che si ha

$$\lim \frac{z}{s^2} = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{E} \lim \frac{dy}{ds} - \mathfrak{R} \lim \frac{dx}{ds} \right) = \frac{1}{2} \mathfrak{R} \quad ,$$

e però z ha il segno di \mathfrak{R} . Dunque *nel dominio d'un punto ellittico la superficie è tutta situata da una stessa parte del piano tangente. Invece nel dominio d'un punto iperbolico la superficie è tagliata dal piano tangente, e la linea d'intersezione ha due rami che passano nel detto punto toccando le assintotiche.*

14. Tangenti conjugate sono due qualunque diametri conjugati dell'indicatrice di Dupin. Quando il punto M si sposta sulla superficie nella direzione definita dall'angolo ω , rispetto alle linee di curvatura, il piano tangente ($s=0$) ruota intorno alla retta definita dall'equazione

$$\cos \omega \frac{\partial z}{\partial s_1} + \sin \omega \frac{\partial z}{\partial s_2} = 0 \quad ,$$

cioè, osservando le (8), $y = x \operatorname{tg} \omega'$, essendo

$$\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \omega' = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Dunque (III, 4) due tangenti conjugate sono tali che, quando un punto tende a spostarsi lungo una di esse, il piano tangente tende a ruotare intorno all'altra. In altri termini *le generatrici della sviluppabile circoscritta ad una superficie, lungo una data curva, sono conjugate alle tangenti della curva stessa*. In particolare sono conjugate fra loro le tangenti alle due linee di curvatura, ed è conjugata a sè stessa ogni tangente ad una linea assintotica. L'angolo θ che una tangente fa con la sua conjugata si può subito determinare, mercè le (1), derivando l'equazione del piano tangente. Si ottiene

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mathcal{N}_0}{\mathcal{E}}, \quad (17)$$

e si vede nuovamente che si ha $\theta = 0$ per le assintotiche, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ per le linee di curvatura.

15. In varie questioni è utile ricorrere alla *rappresentazione sferica* della superficie, che consiste nel porre in corrispondenza i punti della superficie con quelli d'una sfera di raggio 1, in guisa che siano parallele le normali alle due superficie nei punti corrispondenti. Se, rispetto ai soliti assi, sono x, y, z le coordinate di quel punto della sfera che corrisponde all'origine, le funzioni x, y e $z + 1$, coordinate del centro della sfera, debbono soddisfare alle condizioni (1), e però si ha

$$\frac{dx}{ds} = \mathcal{N}_0 x - \mathcal{C}_y - 1 + \mathcal{N}_0, \quad \frac{dy}{ds} = \mathcal{C}_y x - \mathcal{E} z - \mathcal{E}, \quad \frac{dz}{ds} = \mathcal{E} y - \mathcal{N}_0 x;$$

poi le formole (2) danno

$$\frac{\delta x}{ds} = \mathcal{N}_0, \quad \frac{\delta y}{ds} = -\mathcal{E}, \quad \frac{\delta z}{ds} = 0.$$

Ne segue che l'angolo delle tangenti alle due curve è $\theta \pm \frac{1}{2}\pi$, dove θ ha il significato (17). Dunque *la tangente conjugata e la tangente all'immagine sferica d'una curva sono perpendicolari*. In particolare si noti che nella rappresentazione sferica *le linee di curvatura non sono deviate, mentre le assintotiche sono deviate per $\frac{1}{2}\pi$* .

16. Come nei precedenti paragrafi si è studiato il modo di variare della curvatura normale e della torsione geodetica nelle infinite direzioni che si possono considerare intorno ad un punto, così vogliamo ora cercare le leggi di variazione della curvatura geodetica, che pure non ha (§ 5) un valore unico per tutte le curve tangenti in un punto ad una stessa retta. Siano $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s'}, \mathcal{C}$ e \mathcal{C}' ciò che diventano le operazioni $\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}$ e le curvature $\mathcal{C}_1,$

\mathcal{G}_2 , quando gli assi ruotano di ω nel piano tangente. Evidentemente

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos \omega \frac{\partial}{\partial s_1} + \sin \omega \frac{\partial}{\partial s_2}, \quad \frac{\partial}{\partial s'} = -\sin \omega \frac{\partial}{\partial s_1} + \cos \omega \frac{\partial}{\partial s_2}. \quad (18)$$

Intanto si ha, applicando la seconda operazione (18) al risultato della prima,

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} = \cos^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} - \sin^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} - \cos \omega \sin \omega \left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial s'} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Applicando invece la prima al risultato della seconda si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial s' \partial s} = \cos^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} - \sin^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} - \cos \omega \sin \omega \left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s'}.$$

Quindi sottraendo, e ricordando che dev' essere identicamente soddisfatta la relazione (5) per qualunque coppia di curve ortogonali,

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{G}' - \frac{\partial \omega}{\partial s'} \right) \frac{\partial}{\partial s'} - \left(\mathcal{G} + \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial s} &= \mathcal{G}_2 \frac{\partial}{\partial s_2} - \mathcal{G}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \\ &= \mathcal{G}_2 \left(\sin \omega \frac{\partial}{\partial s} + \cos \omega \frac{\partial}{\partial s'} \right) - \mathcal{G}_1 \left(\cos \omega \frac{\partial}{\partial s} - \sin \omega \frac{\partial}{\partial s'} \right). \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathcal{G} + \frac{\partial \omega}{\partial s} = \mathcal{G}_1 \cos \omega - \mathcal{G}_2 \sin \omega, \quad \mathcal{G}' - \frac{\partial \omega}{\partial s'} = \mathcal{G}_1 \sin \omega + \mathcal{G}_2 \cos \omega. \quad (19)$$

A queste relazioni si perviene anche applicando ad una delle coordinate x o y il procedimento tenuto per s in principio del § 10. Bisogna poi osservare che le formole

$$\frac{\delta \alpha}{\delta s_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} - \mathcal{G}_1 \gamma + \mathcal{G}_2 \beta, \quad \frac{\delta \alpha}{\delta s_2} = \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} - \mathcal{G}_2 \beta + \mathcal{G}_1 \gamma,$$

applicate alla direzione $\alpha = \cos \omega, \beta = \sin \omega, \gamma = 0$, diventano

$$\frac{\delta \omega}{\delta s_1} = \frac{\partial \omega}{\partial s_1} - \mathcal{G}_1, \quad \frac{\delta \omega}{\delta s_2} = \frac{\partial \omega}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2;$$

quindi, ricordando (9), si ha

$$\frac{\delta \omega}{\delta s} = \frac{\partial \omega}{\partial s} - \mathcal{G}_1 \cos \omega + \mathcal{G}_2 \sin \omega, \quad \frac{\delta \omega}{\delta s'} = \frac{\partial \omega}{\partial s'} + \mathcal{G}_1 \sin \omega + \mathcal{G}_2 \cos \omega,$$

cioè, in virtù delle (19),

$$\mathcal{G} = -\frac{\delta \omega}{\delta s}, \quad \mathcal{G}' = \frac{\delta \omega}{\delta s'}. \quad (20)$$

Con queste formole, che del resto seguono immediatamente dalle cose dette intorno a \mathcal{G} nel § 5, si riesce a definire la curvatura geodetica d'una linea sopra una data superficie alla stessa guisa della curvatura d'una linea piana nel proprio piano. Inoltre, se la curva si considera come tracciata sulla sviluppabile circoscritta alla superficie, è chiaro che la sua curvatura geo-

detica ha lo stesso valore sulle due superficie, e d'altra parte si vede subito che la detta curvatura rimane inalterata quando la sviluppabile si applica sul piano. Dunque *la curvatura geodetica d'una linea tracciata sopra una superficie è uguale alla curvatura che la linea acquista quando la sviluppabile circoscritta alla superficie, lungo la linea stessa, si applica sul piano.*

17. Ora siamo in grado di *calcolare la flessione delle assintotiche*. Come la formola di Enneper (§ 12) dà la torsione di queste curve, così un'interessante formola di Bonnet ne fa conoscere la flessione quando sono date le curvature principali. Basta sostituire nella prima formola (19) un valore di ω soddisfacente alla (13), ed attribuire alle curvature geodetiche i valori

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1} \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial s_2}, \quad \mathcal{G}_2 = \frac{1}{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2} \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial s_1},$$

che risultano dalle prime due formole di Codazzi. In tal modo si ottiene con un calcolo facile

$$\left(\mathcal{G}_1 + \frac{\partial}{\partial s_2}\right) \cos \omega = \frac{1}{2\mathcal{C}_1^2} \left(\frac{\mathcal{C}_2}{\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \mathcal{C}_1^3}{\partial s_2 \mathcal{C}_2},$$

$$\left(\mathcal{G}_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right) \sin \omega = \pm \frac{1}{2\mathcal{C}_2^2} \left(\frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \mathcal{C}_2^3}{\partial s_1 \mathcal{C}_1},$$

poi, portando questi valori in

$$\frac{1}{\rho} = \left(\mathcal{G}_1 + \frac{\partial}{\partial s_2}\right) \cos \omega - \left(\mathcal{G}_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right) \sin \omega,$$

si giunge alla *formola di Bonnet*:

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{4(-R_1 R_2)^{\frac{7}{2}}}{(R_1 - R_2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{-R_2}{R_1^3} \right)^{\frac{1}{2}} \mp \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{R_1}{-R_2^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Fra le conseguenze di questa formola vogliamo segnalare, con Bonnet, quella che se ne trae supponendo che la superficie sia (IX, 7, d) una quadrica. Allora per ogni punto passano due rette, reali o immaginarie, appartenenti alla superficie, e poichè queste rette sono necessariamente le assintotiche, i due valori della flessione, dati dalla precedente formola, debbono essere entrambi nulli, e ciò esige che il rapporto $R_1:R_2^3$ si conservi costante lungo ogni linea q_1 , e che il rapporto $R_2:R_1^3$ resti invece costante lungo ogni linea q_2 . Inversamente, se ciò accade, vuol dire che tutte le assintotiche sono rette, e però la superficie è una quadrica. Dunque *le quadriche sono caratterizzate dalla seguente proprietà: lungo ciascuna linea di curvatura la corrispondente curvatura principale varia proporzionalmente al cubo dell'altra curvatura principale.*

18. **Teoremi di Laguerre e di Darboux.** Quando le operazioni (18) si applicano a funzioni che dipendono esplicitamente da ω , è talvolta utile mettere in evidenza le derivazioni rispetto a questa variabile, immaginando eseguite le operazioni $\frac{\partial}{\partial s_1}$ e $\frac{\partial}{\partial s_2}$ nell'ipotesi che ω si serbi costante. Se inoltre ai primi membri si vuol dare il significato di derivazioni assolute nello spazio, bisognerà moltiplicare le derivate rispetto ad ω , non per $\frac{\partial \omega}{\partial s}$ o per $\frac{\partial \omega}{\partial s'}$, sì bene per $\frac{\delta \omega}{\partial s}$ e per $\frac{\delta \omega}{\partial s'}$, i cui valori son dati dalle (20). Si avrà dunque

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} &= \cos \omega \frac{\partial}{\partial s_1} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial}{\partial s_2} - \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ \frac{d}{ds'} &= -\operatorname{sen} \omega \frac{\partial}{\partial s_1} + \cos \omega \frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}' \frac{\partial}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ciò premesso, dalle formole (11) e (14) si deduce facilmente

$$\frac{\partial \mathcal{N}_\omega}{\partial \omega} = -2\mathcal{K}_\omega, \quad \frac{\partial \mathcal{K}_\omega}{\partial \omega} = \mathcal{N}_\omega - \mathcal{N}_{\omega + \frac{\pi}{2}}$$

e però, sopprimendo gli indici ω , diventati inutili,

$$\frac{d\mathcal{N}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial s} + 2\mathcal{K}\mathcal{Q}, \quad \frac{d\mathcal{K}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial s} - (\mathcal{N} - \mathcal{N}')\mathcal{Q}.$$

Ora, poichè l'operazione $\frac{\partial}{\partial s}$ si suppone eseguita lasciando ω costante, su quantità che hanno un valore unico per tutte le curve che ammettono una data tangente nel punto che si considera, essa dà evidentemente sempre lo stesso risultato per tutte queste curve, e però si può dire che *ciascuna delle quantità*

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathcal{N}}{ds} - 2\mathcal{K}\mathcal{Q}, \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathcal{K}}{ds} + (\mathcal{N} - \mathcal{N}')\mathcal{Q}$$

ha, come \mathcal{N} e \mathcal{K} , un sol valore per tutte le curve della superficie, che si toccano in un dato punto. L'introduzione di \mathbf{N} e \mathbf{T} nei calcoli produce spesso semplificazioni notevoli. Qui ci limitiamo a segnalare la forma che prendono le prime due formole di Codazzi, scritte per una coppia qualunque di curve ortogonali, rappresentando con H , come si suole, la somma delle curvatures \mathcal{N} ed \mathcal{N}' :

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \mathbf{N} + \mathbf{T}', \quad \frac{\partial H}{\partial s'} = \mathbf{N}' - \mathbf{T}.$$

19. Applicando due volte di seguito la prima o la seconda operazione (18) si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} &= \cos^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \operatorname{sen}^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + \cos \omega \operatorname{sen} \omega \left(\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s'}, \\ \frac{\partial^2}{\partial s'^2} &= \operatorname{sen}^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \cos^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} - \cos \omega \operatorname{sen} \omega \left(\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial s'} \frac{\partial}{\partial s}; \end{aligned}$$

quindi, sommando,

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial s'}\right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{\partial}{\partial s'} - \frac{\partial \omega}{\partial s}\right) \frac{\partial}{\partial s'} = \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2},$$

cioè, in virtù delle (19),

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathcal{G}'\right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{\partial}{\partial s'} + \mathcal{G}\right) \frac{\partial}{\partial s'} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + (\mathcal{G}_1 \operatorname{sen} \omega + \mathcal{G}_2 \cos \omega) \frac{\partial}{\partial s} + (\mathcal{G}_1 \cos \omega - \mathcal{G}_2 \operatorname{sen} \omega) \frac{\partial}{\partial s'}. \end{aligned}$$

Intanto al secondo membro si può dar la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + \mathcal{G}_1 \frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2 \frac{\partial}{\partial s_1} = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) \frac{\partial}{\partial s_1} + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) \frac{\partial}{\partial s_2}.$$

Così viene in luce il carattere invariante dell'operazione

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathcal{G}'\right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{\partial}{\partial s'} + \mathcal{G}\right) \frac{\partial}{\partial s'},$$

al cui risultato si dà il nome di *parametro differenziale secondo*.

20. Ed ora è facile estendere ai sistemi di curve, tracciati sopra una superficie qualunque, la formola di Bonnet, già dimostrata (VIII, 13) nel piano. Per *calcolare la curvatura geodetica di quella linea, che nel sistema definito dalla funzione u passa per un dato punto*, noi disponiamo della prima formola (19), che ci conviene scrivere nel seguente modo:

$$\mathcal{G} = \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) \cos \omega - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) \operatorname{sen} \omega.$$

Se in questa si pone

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_2}, \quad \operatorname{sen} \omega = -\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_1}, \quad (22)$$

si trova subito la *formola di Bonnet*:

$$\mathcal{G} = \frac{\Delta^2 u}{\sqrt{\Delta u}} + \Delta \left(u, \frac{1}{\sqrt{\Delta u}}\right).$$

Invece la seconda formola (19) dà

$$\mathcal{G}' = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2\right) \cos \omega + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1\right) \operatorname{sen} \omega,$$

e se vi si sostituiscono i valori (22), tenendo conto della condizione (5), si trova

$$\mathcal{G}' = -\frac{\partial \left(u, \frac{1}{\sqrt{\Delta u}}\right)}{\partial (s_1, s_2)}.$$

Qui si noti che il costante annullarsi di \mathcal{Q}' è sufficiente e necessario, da una parte perchè Δu sia funzione di u , dall'altra perchè le curve del sistema siano le traiettorie ortogonali d' un sistema di geodetiche, o, come si suol dire per una ragione facile a spiegarsi (cfr. § 8), perchè siano geodeticamente parallele. Dunque: *affinchè le curve del sistema definito dalla funzione u siano geodeticamente parallele occorre e basta che Δu sia una funzione di u .*

21. Sistemi isotermi. Le considerazioni fatte per le curve piane, nei § 6 ed 11 dell'ottavo capitolo, sono immediatamente applicabili ai sistemi di curve tracciate sopra una superficie qualunque, e però possiamo parlare di *sistemi isotermi*, e ritenere come dimostrato che *in un doppio sistema ortogonale non può uno dei sistemi di curve essere isotermo senza che sia tale anche l'altro*. Anche il calcolo eseguito nel § 12 dello stesso capitolo si può qui supporre ripetuto, per affermare, in conseguenza, che la *condizione*

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} = \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \quad (23)$$

è necessaria e sufficiente perchè il sistema delle linee coordinate sia isotermo. Così, per esempio, la condizione (23) è soddisfatta quando \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 sono costanti lungo le rispettive linee. Ne segue che *ogni doppio sistema ortogonale, composto di linee a curvatura geodetica costante, è isotermo*. Inoltre si noti che, se la condizione (23) è soddisfatta, e se \mathcal{Q}_1 resta costante lungo ogni linea q_1 , anche \mathcal{Q}_2 è costante lungo ogni linea q_2 . Dunque, *se in un doppio sistema isotermo le linee d'un sistema sono a curvatura geodetica costante, saranno tali anche quelle dell'altro sistema*.

22. Ora supponiamo determinata una funzione g , tale che si abbia

$$\Delta^2 g = \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}^2, \quad (24)$$

ed osserviamo che la formola di Gauss (o terza formola di Codazzi) si può scrivere nel seguente modo:

$$\Delta^2 g + \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{C}_2 \right) \mathcal{C}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{C}_1 \right) \mathcal{C}_1 = 0;$$

poi, mettendo per Δ^2 la sua espressione,

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{C}_2 \right) \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + \mathcal{C}_2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{C}_1 \right) \left(\frac{\partial g}{\partial s_2} + \mathcal{C}_1 \right) = 0.$$

Ne segue che la condizione (4) è soddisfatta per le funzioni

$$u = \frac{\partial g}{\partial s_2} + \mathcal{C}_1, \quad v = -\frac{\partial g}{\partial s_1} - \mathcal{C}_2,$$

e però esiste una funzione f , tale che si possa scrivere

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\partial f}{\partial s_1} - \frac{\partial g}{\partial s_2}, \quad \mathcal{C}_2 = -\frac{\partial f}{\partial s_2} - \frac{\partial g}{\partial s_1}. \quad (25)$$

Questa è dunque una forma che si può sempre dare alle funzioni \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 . Inversamente, se si perviene, in un modo qualsiasi, a porre le \mathcal{Q} sotto la forma (25), si può essere sicuri che la funzione g soddisfa alla (24). Per convincersene basta sostituire i valori (25) nella formola di Gauss. Finalmente si osservi che

$$\Delta^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2 \right) \left(\frac{\partial g}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1 \right) - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1 \right) \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2 \right) = \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} .$$

Dunque, affinché sia isoterma il sistema delle linee coordinate, è necessario e sufficiente che la funzione f sia armonica. Si vedrà invece che il ridursi di g a funzione armonica è indizio d'una considerevole particolarizzazione della superficie. Del resto le formole (25) convengono a qualunque doppio sistema ortogonale, e dalle (19) si deduce infatti, mercè le stesse (25),

$$\mathcal{Q} = \frac{\partial}{\partial s} (f - \omega) - \frac{\partial g}{\partial s'} , \quad \mathcal{Q}' = -\frac{\partial}{\partial s} (f - \omega) - \frac{\partial g}{\partial s} ,$$

e per conseguenza, se si vuole che il sistema definito dall'angolo ω sia isoterma, bisogna fare in modo che la funzione $f - \omega$ sia armonica. Dunque la determinazione di tutti i sistemi isotermi d'una superficie dipende dall'integrazione dell'equazione

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} .$$

23. Curvatura. Dalla considerazione degli invarianti ortogonali

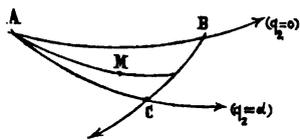
$$H = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} , \quad K = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 - \mathcal{C}^2 = \frac{1}{R_1 R_2} ,$$

della forma quadratica (11) noi trarremo i mezzi per misurare la curvatura d'una superficie in un dato punto. *Curvatura media*, in M , è la media aritmetica delle curvatures normali di tutte le curve della superficie, che passano per M , immaginando che queste curve siano equamente distribuite, in orientamento, intorno ad M . Se ad ogni curva se ne associa una che le sia perpendicolare, la somma delle due curvatures normali resta costantemente uguale ad H quando la coppia delle tangenti ruota intorno ad M , e però è chiaro che la media cercata è $\frac{1}{2}H$. Dunque la *curvatura media* è misurata da $\frac{1}{2}H$, cioè dalla *semi-somma delle curvatures principali*. Si chiama poi *curvatura totale*, o semplicemente *curvatura* della superficie, il limite d'un certo rapporto, analogo a quello che si considera per misurare la curvatura d'una curva piana. Sopra una simile curva si prenda un *elemento lineare*, e si costruiscano le normali nei punti che lo limitano: il rapporto dell'angolo delle normali alla *lunghezza* dell'elemento tende a misurare la curvatura della linea considerata, nel punto M , quando l'elemento tende a ridursi all'unico punto M . Analogamente, per misurare la curvatura d'una superficie in un punto M , Gauss immagina un *elemento*

superficiale intorno ad M , e costruisce le normali alla superficie lungo il contorno dell'elemento: l'angolo solido compreso fra queste normali, diviso per l'area dell'elemento, tende a misurare la curvatura, in M , quando l'elemento tende a ridursi ad M . Il detto angolo solido è poi misurato, per definizione, dall'area che sopra una superficie sferica, di raggio 1, stacca il cono dei raggi paralleli alle rette considerate. Dunque la curvatura è misurata dal limite del rapporto fra l'area dell'immagine sferica dell'elemento superficiale e l'area dello stesso elemento. Supponiamo che questo sia il rettangolo costruito sugli archi elementari ds_1 e ds_2 delle linee di curvatura che passano per M . Siccome nella rappresentazione sferica queste linee non sono deviate, l'immagine sferica del detto rettangolo è un altro rettangolo, i cui lati, per ciò che si è visto nel § 15, sono $\mathcal{O}_1 ds_1 = ds_1 : R_1$ ed $\mathcal{O}_2 ds_2 = ds_2 : R_2$ (giacchè $\mathcal{E} = 0$) come del resto risulta da considerazioni geometriche semplicissime. Dunque $ds_1 ds_2$ e $K ds_1 ds_2$ sono le aree dei due rettangoli, e però *la curvatura totale è misurata da K* , cioè dal *prodotto delle curvatures principali*. Se il primo rettangolo si costruisce su due curve ortogonali qualunque, si giunge un po' meno rapidamente allo stesso risultato, ma si riesce inoltre a porre in evidenza il carattere invariantivo dell'espressione $\mathcal{O}\mathcal{O}' - \mathcal{E}^2$. Qui si osservi come la conoscenza di questo carattere permetta di enunciare immediatamente il teorema di Enneper, dimostrato in fine del § 12. Infatti per le assintotiche si ha $\mathcal{O} = 0$, $\mathcal{E} = -\frac{1}{r}$, e per conseguenza $K = -\frac{1}{r^2}$. Dunque, in ogni punto, *la curvatura totale, cambiata di segno, è uguale al quadrato della torsione delle assintotiche*. Segnaliamo, per finire, la forma data da Gauss all'espressione di K . Basta sostituire i valori (3) nella terza formola di Codazzi per ottenere (cfr. VIII, 10)

$$K = -\frac{1}{Q_1 Q_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{Q_1} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{Q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \right) \right].$$

24. Consideriamo un *triangolo geodetico*, cioè la figura ABC determinata sopra una superficie da tre geodetiche, e siano α, β, γ gli angoli interni di tale triangolo. Per determinare l'area σ dell'immagine di ABC nella rappresentazione sferica prendiamo come linee q_1 le geodetiche uscenti dal vertice A , ed assumiamo per coordinate q_1 e q_2 d'un punto qualunque M la distanza geodetica AM , e l'angolo che la geodetica AM fa con AB . Fra le linee q_2 , traiettorie ortogonali delle geodetiche uscenti dal vertice A , quelle che sono infinitamente vicine ad A si possono considerare come situate nel piano che tocca la superficie in A , e però il loro arco elementare $Q_2 dq_2$, si può confondere con $q_1 dq_2$, a prescindere da infinitesimi superiori. In altri termini



$$\lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{Q_2}{q_1} = 1 \quad , \quad \lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} = 1 .$$

Ciò premesso, osserviamo che si ha, in virtù della formola di Gauss,

$$\sigma = \iint K Q_1 Q_2 dq_1 dq_2 = - \iint \frac{\partial^2 Q_2}{\partial q_1^2} dq_1 dq_2 ,$$

dove l'integrazione va estesa a tutta l'area chiusa in ABC. D'altra parte la prima formola (19) dà

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = - Q_2 \operatorname{sen} \omega , \quad \text{cioè} \quad d\omega = - Q_2 Q_2 dq_2 = - \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} dq_2 .$$

Ora, tornando a σ , se prima si esegue l'integrazione lungo una delle geodetiche definite da valori di q_2 , compresi fra 0 ed α , e se poi si fa variare q_2 da 0 ad α , si ottiene, in virtù delle precedenti osservazioni,

$$\sigma = \int_0^\alpha \left(1 - \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \right) dq_2 = \alpha + \int_B^C d\omega ,$$

dove ω , inclinazione della geodetica BC sulle linee q_1 , ha il valore $\pi - \beta$ in B ed il valore γ in C. Dunque

$$\sigma = \alpha + \gamma - (\pi - \beta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi .$$

In particolare, quando K è costante, σ rappresenta l'area stessa di ABC, moltiplicata per K. Dunque sulle superficie a curvatura costante (delle quali si parlerà nel capitolo seguente) *l'area d'un triangolo geodetico è proporzionale all'eccesso della somma dei suoi angoli su due retti*. Ne segue che questa somma è superiore, inferiore o uguale a due retti secondo che la curvatura è positiva, negativa o nulla.

25. Applicabilità. In questo primo saggio noi vogliamo limitarci a pochi cenni intorno all'applicabilità delle superficie le une sulle altre. Quando fra i punti di due superficie è possibile porre una corrispondenza tale che la distanza geodetica di due punti, presi ad arbitrio sopra una superficie, sia uguale alla distanza geodetica dei punti che loro corrispondono sull'altra, ben si dice che le due superficie sono *applicabili* fra loro, poichè una stoffa, che s'immagini tessuta con fili flessibili ed inestendibili, tesi in tutti i versi sopra una di esse, si potrà evidentemente applicare anche sull'altra, senza che i fili (*cfr.* § 8) se ne stacchino o si spezzino, cioè senza che la stoffa si pieghi o si laceri. In altri termini le superficie applicabili sopra una superficie data si possono considerare come le infinite configurazioni che questa può assumere flettendosi senza estendersi o contrarsi in alcuna sua parte. Se l'arco elementare sopra una superficie, riferita ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee ortogonali, è dato dalla formola $ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2$, si deve poter trovare su qualunque superficie, applicabile alla superficie data, tale un sistema di coordinate curvilinee ortogonali, che l'arco elementare venga rappresentato dalla stessa formola, ed è ovvio che in questa pos-

sibilità risiede appunto la condizione sufficiente e necessaria per l'applicabilità delle due superficie. Ne segue che, se si scrive la formola di Gauss per due superficie applicabili, in due punti corrispondenti, si deve trovare lo stesso valore di K . Dunque: *affinchè due superficie siano applicabili l'una sull'altra è necessario che nei punti corrispondenti esse abbiano la stessa curvatura*. In altri termini, quando una superficie flessibile ed inestendibile si va deformando nello spazio, vi è qualche cosa che non varia in ciascun punto, cioè la curvatura totale.

26. Sviluppate e sviluppanti. Le proprietà delle sviluppate delle curve piane ci spingono ad occuparci per analogia del luogo dei centri principali di curvatura d'una superficie qualunque, luogo evidentemente composto di due falde, una generata dal centro C_1 , l'altra dal centro C_2 . Ciascuna falda si può anche considerare come il luogo degli spigoli di regresso delle infinite sviluppabili che tagliano ortogonalmente la data superficie lungo le linee di curvatura d'un sistema. Le due falde costituiscono quella che si suole chiamare la *svilupata* della superficie proposta, e questa, rispetto alla sviluppata, prende il nome di *svilupante*. Consideriamo la prima falda, cioè quella generata dal punto C_1 , le cui coordinate sono $x=0, y=0, z=R_1$. Quando M tende a spostarsi lungo la linea di curvatura q_1 le formole fondamentali danno

$$\frac{\delta x}{\delta s_1} = 0, \quad \frac{\delta y}{\delta s_1} = 0, \quad \frac{\delta z}{\delta s_1} = \frac{\partial R_1}{\partial s_1}, \quad (26)$$

e però C_1 tende a spostarsi lungo la normale, com'era prevedibile, giacchè C_1 tende allora a percorrere lo spigolo di regresso della sviluppabile formata dalle normali alla superficie lungo la detta linea q_1 . Invece, per M tendente a spostarsi lungo la linea q_2 , si trova

$$\frac{\delta x}{\delta s_2} = 0, \quad \frac{\delta y}{\delta s_2} = \frac{l}{R_2}, \quad \frac{\delta z}{\delta s_2} = \frac{\partial R_1}{\partial s_2},$$

rappresentando con l la lunghezza del segmento C_1C_2 . Dunque, per uno spostamento qualunque di M , definito dall'inclinazione ω sulla linea q_1 , si ha, secondo la formola (9),

$$\frac{\delta x}{\delta s} = 0, \quad \frac{\delta y}{\delta s} = \frac{l}{R_2} \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\delta z}{\delta s} = \frac{dR_1}{ds}. \quad (27)$$

Dalla prima di queste uguaglianze si vede che *il piano tangente ad una falda della sviluppata è normale alla corrispondente linea di curvatura*, d'onde segue subito che i piani tangenti alle due falde, in due punti corrispondenti, sono sempre perpendicolari fra loro. Inoltre le (27) mostrano che, se si vuole che C_1 si sposti perpendicolarmente alla normale, M deve muoversi in modo che R_1 resti costante. In altri termini, come agli spigoli di regresso delle sviluppabili delle normali, lungo le linee di curvatura d'un sistema, corrispon-

dono queste linee stesse, così le loro traiettorie ortogonali corrispondono alle curve della sviluppante, lungo le quali resta costante il corrispondente raggio di curvatura. Ora è naturale assumere i detti spigoli e le loro traiettorie ortogonali come linee coordinate sulla superficie (C_1). Allora, in C_1 , gli assi x' ed y' saranno rispettivamente paralleli agli assi x ed y , e l'asse z' si dovrà dirigere in senso opposto all'asse x . Ciò premesso, per trovare tutte le curvature fondamentali, relative alla superficie (C_1), basta esprimere che le condizioni d'immobilità del punto (x, y, z) , soddisfatte rispetto al triedro della superficie (M), sono soddisfatte anche rispetto al triedro di (C_1) dalle nuove coordinate

$$x' = z - R_1, \quad y' = y, \quad z' = -x. \quad (28)$$

Innanzitutto, per trovare le relazioni fra i nuovi e gli antichi quozienti differenziali, si noti che dalle formole (26) e (27) risulta

$$ds'_1 = \frac{\partial R_1}{\partial s_1} ds_1, \quad ds'_2 = \frac{l}{R_2} \operatorname{sen} \omega ds,$$

dove ω è definito dalla condizione

$$\frac{dR_1}{ds} = 0, \quad \text{cioè} \quad \cos \omega \frac{\partial R_1}{\partial s_1} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial R_1}{\partial s_2} = 0.$$

Ne segue

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s'_1} = \frac{\partial}{\partial s_1}, \quad \frac{l}{R_2} \frac{\partial R_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s'_2} = \frac{\partial R_1}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} - \frac{\partial R_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1}. \quad (29)$$

Se la prima di queste operazioni si applica alla terza coordinata (28), si ottiene

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \frac{\partial z'}{\partial s'_1} = -\frac{\partial x}{\partial s_1} = -\mathcal{O}'_1 z + \mathcal{G}'_1 y + 1,$$

mentre d'altra parte, distinguendo con un apice tutto ciò che si riferisce alla superficie (C_1), si deve avere

$$\frac{\partial z'}{\partial s'_1} = \mathcal{E}' y' - \mathcal{O}'_1 x' = \mathcal{E}' y - \mathcal{O}'_1 z + \mathcal{O}'_1 R_1;$$

quindi, identificando,

$$\frac{\mathcal{O}'_1}{\mathcal{O}'_1} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{G}'_1} = \frac{1}{\frac{\partial R_1}{\partial s_1}}.$$

Così \mathcal{O}'_1 e \mathcal{E}' sono noti quando sulla sviluppante si conoscono le curvature principali, giacchè per le formole di Codazzi si ha

$$\mathcal{G}'_1 = \frac{R_2}{l R_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2}, \quad \mathcal{G}'_2 = -\frac{R_1}{l R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1}. \quad (30)$$

Analogamente, confrontando le uguaglianze

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \frac{\partial y'}{\partial s'_1} = \frac{\partial y}{\partial s_1} = \mathcal{G}'_1 \omega, \quad \frac{\partial y'}{\partial s'_1} = \mathcal{G}'_1 \omega' - \mathcal{E}' z' = \mathcal{E}' \omega + \mathcal{G}'_1 z - \mathcal{G}'_1 R_1,$$

si ritrova il valore di \mathcal{E}' ed inoltre si ottiene $\mathcal{G}'_1 = 0$. Dunque *gli spigoli di regresso delle sviluppabili normali ad una superficie sono geodetiche della superficie sviluppata*. Se poi la prima operazione (29) si applica anche ad x' , si giunge solo ad una conferma dei risultati precedenti. Ora si applichi ad x' la seconda operazione (29):

$$\frac{l}{R_2} \frac{\partial R_1}{\partial s_1} (\mathcal{E}'x + \mathcal{G}'_2 y) = \frac{\partial R_1}{\partial s_2} \left(\mathcal{O}'_1 x + \frac{\partial R_1}{\partial s_1} \right) - \frac{\partial R_1}{\partial s_1} \left(\mathcal{O}'_2 y + \frac{\partial R_1}{\partial s_2} \right).$$

Si ottiene così un valore di \mathcal{E}' , che le formole (30) mostrano uguale al precedente; ed inoltre si trova $\mathcal{G}'_2 = -\frac{1}{l}$, vale a dire che C_2 è il centro di curvatura geodetica di quella curva $R_1 = \text{costante}$, che sulla prima falda passa per C_1 , come, inversamente, C_1 è il centro di curvatura geodetica, in C_2 , della curva del sistema definito sulla seconda falda dalla condizione $R_2 = \text{costante}$. Finalmente, se la seconda operazione (29) si applica ad y' o pure a s' , si trova

$$\frac{l}{R_2} \frac{\partial R_1}{\partial s_1} \mathcal{O}'_2 = \mathcal{G}'_2 \frac{\partial R_1}{\partial s_1} + \mathcal{G}'_1 \frac{\partial R_1}{\partial s_2},$$

e così, mercè le (30), anche \mathcal{O}'_2 viene espresso nelle sole funzioni R .

27. Inversamente ad ogni superficie se ne possono associare infinite altre, ciascuna delle quali costituisce, insieme alla superficie data, la sviluppata di tutto un sistema di superficie parallele. Infatti, se si vuole che il punto $(-t, 0, 0)$ si sposti normalmente ad Mx qualunque sia la direzione in cui si sposta M sulla data superficie, le formole fondamentali mostrano che occorre e basta che si abbia $\partial t: \partial q_1 = Q_1$, $\partial t: \partial q_2 = 0$, cioè t e per conseguenza Q_1 debbono essere funzioni del solo parametro q_1 , e però sulle linee q_1 è soddisfatta la condizione $\mathcal{G}'_1 = 0$, già trovata necessaria nel paragrafo precedente. Dunque: *affinchè le rette d'una congruenza siano normali ad una superficie occorre e basta che siano le tangenti ad una semplice infinità di geodetiche di un'altra superficie*. Intanto, se si prende $Q_1 = 1$, si dovrà avere $t = s_1 + \text{costante}$, e però infiniti punti di Mx , a distanze costanti l'uno dall'altro, descrivono infinite superficie, le cui normali son tutte tangenti alla superficie data. Evidentemente, se si considerano le tangenti ad una stessa linea q_1 , esse incidono linee di curvatura sulle infinite superficie parallele, ed il punto di contatto segnerà ad ogni istante uno dei centri di curvatura. È dunque vero che *ogni superficie si può considerare, per ciascun suo sistema semplicemente infinito di geodetiche curvilinee, come una delle due falde della sviluppata d'un sistema di superficie parallele*. L'altra falda si dice *complementare* della prima, e dalle cose dette risulta chiaro che *ogni superficie ammette infinite superficie complementari, ciascuna delle quali corrisponde ad un sistema semplicemente infinito di geodetiche curvilinee, arbitrariamente tracciato sulla superficie che si considera*. Ora il teorema dimostrato in fine del paragrafo precedente si può enunciare dicendo che *la superficie complementare,*

corrispondente ad un dato sistema di geodetiche, è il luogo dei centri di curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle geodetiche stesse. Diciamo, per finire, come si possano tracciare meccanicamente le sviluppanti d'una superficie data, in modo del tutto simile a quello che già conosciamo per le curve piane o storte. S'immagini una stoffa tessuta con fili inestendibili, tesi sulla superficie ed attraversati ad angolo retto da infiniti altri fili completamente deformabili, in guisa che la stoffa in tutte le sue parti possa aderire alla superficie senza piegarsi nè lacerarsi. Ciò premesso, se si svolge la stoffa dalla superficie curando di mantenerla sempre tesa nel verso dei fili inestendibili, è chiaro che gli altri fili descriveranno le infinite sviluppanti parallele, che corrispondono al sistema di geodetiche (cfr. § 8) segnato dai primi fili sulla superficie.

XII. ESERCIZII SULLE SUPERFICIE.

1. Per *determinare lo spigolo di regresso della sviluppabile circoscritta ad una superficie, lungo una data linea, bisogna ricordarsi (XI, form. 17) che nel piano tangente in M la generatrice di tale sviluppabile è definita mercè l'angolo $\theta = \arctg(\mathcal{Q}:\mathcal{E})$* ; poi si trova la distanza t di M dal corrispondente punto dello spigolo di regresso derivando l'equazione $y = \omega t g \theta$, ed esprimendo che le coordinate di questo punto, cioè $-t \cos \theta$, $-t \sin \theta$, 0, soddisfano alle condizioni (XI, form. 1) d'immobilità. In tal modo si ottiene

$$t = \frac{\text{sen } \theta}{\mathcal{Q} - \frac{d\theta}{ds}} . \quad (1)$$

È poi facile calcolare l'arco e le curvature col solito procedimento, mercè le formole (2) del precedente capitolo. Per le linee di curvatura la formola (1) mostra che $-t$ si riduce al raggio di curvatura geodetica, e del resto in questo caso è chiaro che lo spigolo cercato è una sviluppata della curva, dimodochè, in generale, t dovrà variare, perchè rappresenta appunto la lunghezza dell'arco di sviluppata. Se invece t è costante (e ciò accade quando è costante \mathcal{Q}) il detto spigolo si riduce ad un punto, cioè la sviluppabile circoscritta è una superficie conica, le cui generatrici sono attraversate ad angolo retto dalla curva considerata. Si giunge così alla seguente proposizione di Brioschi, che generalizza un noto (XI, 2) teorema: *ogni linea di curvatura, che ha la curvatura geodetica costante, appartiene ad una sfera che taglia ortogonalmente la superficie.* Ritorniamo alla (1) per osservare che le linee lungo le quali la superficie circoscritta è cilindrica (linee interessanti in quanto che separano le parti della superficie, illuminate da un fascio di raggi paralleli, da quelle che restano nell'ombra) sono caratterizzate dall'eguaglianza $\mathcal{Q} = d\theta : ds$, che si può porre sotto una forma tale da esprimere la

curvatura geodetica, in ogni punto M , in funzione di quantità (XI, 18) che rimangono invariate per tutte le curve tangenti in M alla curva che si considera. Calcolando infatti la derivata di θ , si trasforma la precedente condizione in quest'altra:

$$K\mathcal{Q} = \mathcal{E}\mathbf{N} - \mathcal{D}\mathcal{T}.$$

Così in ogni punto, data la tangente, si potrà determinare anche il piano osculatore.

2. La proprietà di \mathbf{N} , testè ricordata, permette di *calcolare la curvatura, in un punto M , dell'intersezione d'una superficie col piano tangente in M* . Si sa che questa curva ha due rami, tangenti alle assintotiche. Intanto, se si distingue con un indice tutto ciò che si riferisce ad un'assintotica, si ha

$$\mathcal{D}\mathcal{O} = 0, \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{r_0}, \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{\rho_0}, \quad \mathbf{N} = \frac{2}{\rho_0 r_0}.$$

D'altra parte la torsione geodetica, per tutte le curve tangenti all'assintotica, ha (XI, 4) un sol valore, e però, nel punto M ,

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0};$$

quindi, in particolare, se la curva è l'intersezione della superficie col piano tangente, nel qual caso si ha $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{r} = 0$, è pure

$$\frac{d\mathcal{D}\mathcal{O}}{ds} = \cos\psi \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} - \frac{\sin\psi}{\rho} \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho r_0}, \quad \mathbf{N} = \frac{d\mathcal{D}\mathcal{O}}{ds} - 2\mathcal{E}\mathcal{Q} = \frac{3}{\rho r_0}.$$

Eguagliando fra loro i due valori di \mathbf{N} si trova $\rho = \frac{2}{3}\rho_0$, in generale, e si scopre così questo elegante teorema di Beltrami: *la curvatura dell'intersezione di una superficie col piano tangente in un punto iperbolico è uguale, in questo punto, per ciascun ramo, ai $\frac{2}{3}$ della curvatura dell'assintotica tangente al ramo che si considera*. Qui, ricordando le cose dette in fine del § 4 del precedente capitolo, richiamiamo l'attenzione su questo esempio di linee che si toccano, osculate da uno stesso piano, e che pure non hanno egual flessione nel punto di contatto.

3. Sul piano (XI, 2) ogni curva è assintotica ed insieme linea di curvatura, dimodochè K è nulla perchè sono nulli $\mathcal{D}\mathcal{O}_1, \mathcal{D}\mathcal{O}_2$ e \mathcal{E} . Più generalmente è nulla la curvatura di qualunque superficie sviluppabile, perchè per ogni punto di tale superficie passa una retta, lungo la quale le normali alla superficie formano un piano. Questa retta è dunque linea di curvatura, e d'altra parte (XI, 1) essa è anche assintotica, d'onde segue che, essendo nulli $\mathcal{D}\mathcal{O}$ e \mathcal{E} per ogni generatrice rettilinea, si ha $K=0$ in ogni punto. *Esistono altre superficie a curvatura nulla?* Se la superficie vien riferita alle sue linee di curvatura, dev'essere costantemente nulla \mathcal{E} , e tale dev'essere anche una delle $\mathcal{D}\mathcal{O}$, per esempio $\mathcal{D}\mathcal{O}_1$. Intanto la seconda formola di Codazzi (XI, 9) dà $\mathcal{D}\mathcal{O}_2 \mathcal{Q}_1 = 0$. Se a questa condizione si soddisfa prendendo $\mathcal{D}\mathcal{O}_2 = 0$, una nota formola (XI, 12) mostra che si ha $\mathcal{E}_\omega = 0$ qualunque sia ω , cioè tutte le linee sono di curvatura, e però (XI, 11) la superficie è necessariamente sferica; anzi essa è, più particolarmente, *piana*, giacchè

una sfera di raggio finito non ammette assintotiche reali. Se poi non è $\mathcal{G}_2 = 0$ si dovrà supporre $\mathcal{G}_1 = 0$. Dunque (XI, 1) ogni linea q_1 , geodetica ed assintotica, è necessariamente *retta*, vale a dire che la superficie è rigata; nè può essere storta, altrimenti (IX, 8) le generatrici non sarebbero linee di curvatura. Dunque *le sole superficie a curvatura nulla sono il piano e le superficie sviluppabili*.

4. Può una superficie ammettere due sistemi di geodetiche, che si tagliano sotto un angolo costante? Se le geodetiche d'un sistema si prendono come linee coordinate q_1 , si ha $\mathcal{G}_1 = 0$, e la prima formola (19) del capitolo precedente mostra che dev'essere anche $\mathcal{G}_2 = 0$, dimodochè ogni altro sistema di traiettorie delle curve del dato sistema sarà costituito da geodetiche: ciò accade sul piano e sulle sviluppabili. Intanto la formola di Gauss dà $K = 0$, e però possiamo enunciare il seguente teorema di Liouville: *due sistemi di geodetiche d'una superficie non sviluppabile non possono tagliarsi ad angolo costante*.

5. Qual'è la curvatura d'una superficie rigata? Se α, β, γ sono i coseni direttori della generatrice, rispetto al triedro fondamentale d'una curva qualunque della superficie, l'angolo ψ della normale principale con la normale alla superficie (perpendicolare alla tangente ed alla generatrice) è dato dalla relazione $\beta \sin \psi + \gamma \cos \psi = 0$, dalla quale, derivando e tenendo conto di note (IX, form. 37) condizioni, successivamente si deduce

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r} + \frac{\alpha\beta}{(\beta^2 + \gamma^2)\rho}, \quad \mathcal{C} + \alpha\mathcal{G} = -\frac{\cos^2\tau}{p}.$$

Ora, se si assume come linea fondamentale la stessa generatrice, è chiaro che deve essere $\mathcal{G} = 0$, e però (IX, form. 30)

$$\mathcal{C} = -\frac{\cos^2\tau}{p} = -\frac{p}{t^2 + p^2}.$$

Dunque, a prescindere dal segno, il *parametro distributore d'una rigata storta rappresenta il raggio di torsione geodetica delle generatrici, lungo la linea di stringimento*. Poi, essendo $K = -\mathcal{C}^2$, vediamo che il *valore assoluto della curvatura d'una rigata storta, lungo la linea di stringimento, è inverso del quadrato del parametro distributore*. Lungo una generatrice la curvatura varia invece come $\cos^2\tau$, dimodochè all'infinito si annulla. Ciò si spiega col fatto che ogni rigata ammette una *svilupabile assintotica*, involuppo dei piani condotti per le generatrici perpendicolarmente ai piani centrali, e però all'infinito si comporta sempre come una sviluppabile. Ora che conosciamo il valore di \mathcal{C} , e sappiamo che \mathcal{G} e \mathcal{G}' sono nulli, la seconda formola di Codazzi ci dà subito la curvatura geodetica di qualunque traiettoria ortogonale delle generatrici:

$$\mathcal{G}' = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \log \mathcal{C} = -\frac{\partial}{\partial s} \log \cos \tau = \frac{t}{t^2 + p^2}.$$

Siccome \mathcal{G}' non si annulla, a distanza finita, se non per $t=0$, si vede (cfr. IX, 16) che *la linea di stringimento è il luogo dei punti, nei quali è nulla la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle generatrici*.

6. **Superficie di rotazione.** Si chiamano così le superficie generate da una

curva piana che ruota intorno ad una retta fissa nel suo piano, alla quale retta si dà il nome di *asse*. La curva generatrice, in ciascuna delle infinite sue posizioni si chiama *meridiano*, ed il circolo descritto da un punto qualunque del meridiano si chiama *parallelo*. Adunque i meridiani ed i paralleli sono le sezioni fatte nella superficie dai piani che passano per l'asse e dai piani perpendicolari all'asse. Non vi è ragione perchè la normale alla superficie, in un punto qualunque M, sia situata piuttosto da una parte che dall'altra del piano del meridiano che passa per M, e però la detta normale coincide sempre con la normale al meridiano, in M. Dunque i meridiani sono ad un tempo linee di curvatura e geodetiche della superficie. Ne segue che, se si assumono come linee q_1 i meridiani, si ha

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{\rho_1}, \quad \mathcal{G}_1 = 0, \quad \mathcal{E} = 0. \quad (2)$$

L'altro sistema di linee di curvatura è costituito dalle traiettorie ortogonali dei meridiani, cioè dai paralleli, come del resto si riconosce direttamente osservando che le normali alla superficie, lungo ciascun parallelo, concorrono sull'asse. Se φ è l'inclinazione dell'asse sulle tangenti ai meridiani lungo un parallelo di raggio q , è chiaro che φ e q sono funzioni soltanto di $q_1 = s_1$, ed è noto (II, 2) che si ha

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = \frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{dq}{ds_1} = \text{sen } \varphi. \quad (3)$$

Finalmente, per le definizioni date in principio del capitolo precedente, osservando che nel caso attuale ψ è $\pi - \varphi$,

$$\mathcal{N}_2 = -\frac{\cos \varphi}{q}, \quad \mathcal{G}_2 = \frac{\text{sen } \varphi}{q}. \quad (4)$$

Adunque si vede che i raggi principali di curvatura sono

$$R_1 = \rho_1, \quad R_2 = -\frac{q}{\cos \varphi},$$

vale a dire che i centri principali di curvatura in ogni punto M sono il centro di curvatura del meridiano che passa per M, e quel punto dell'asse, che sta sulla normale elevata per M alla superficie. È facile verificare, tenendo presenti le (3), che i valori (2) e (4) soddisfano alle relazioni di Codazzi. Ciò premesso, una nota formula (XI, form. 19) dà il valore della curvatura geodetica in una direzione qualunque:

$$\mathcal{G} = -\mathcal{G}_2 \text{sen } \omega - \frac{\partial \omega}{\partial s}.$$

D'altra parte si ha, in virtù di (3),

$$\mathcal{G}_2 = \frac{\text{sen } \varphi}{q} = \frac{1}{q} \frac{dq}{ds_1} = \frac{1}{q \cos \omega} \frac{\partial q}{\partial s}.$$

Dunque

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{q \cos \omega} \frac{\partial}{\partial s} (q \text{sen } \omega). \quad (5)$$

Per $\mathcal{G} = 0$ si trova il seguente teorema di Clairaut: *ogni geodetica d'una superficie di rotazione incontra i meridiani sotto un angolo, il cui seno varia, da un meridiano all'altro, proporzionalmente alla curvatura del parallelo.*

7. *Determinare le assintotiche d'una superficie di rotazione*, cioè, data l'equazione intrinseca $f(s, \rho) = 0$ del meridiano, trovare le equazioni intrinseche delle assintotiche. Prima si noti che l'inclinazione ω di queste curve sui meridiani è data (XI, 12) dalla formola

$$\operatorname{tg}^2 \omega = -\frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{\rho \cos \varphi}, \quad (6)$$

in cui q e φ sono funzioni di s , che si sanno ricavare, mercè le (3), dall'equazione intrinseca data. Ne segue che anche ω è funzione della sola variabile s , dimodochè basterà conoscere un' assintotica sola per conoscerle tutte. Ciò premesso, avvalendosi della (5), è facile calcolare l'arco e la flessione delle assintotiche:

$$s_0 = \int \frac{ds}{\cos \omega}, \quad \frac{1}{\rho_0} = -\frac{1}{q} \frac{d}{ds} (q \operatorname{sen} \omega). \quad (7)$$

La torsione ci è poi data immediatamente dal teorema di Enneper:

$$\frac{1}{r_0^2} = -\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\cos \varphi}{q \rho}, \quad r_0 = \rho \operatorname{tg} \omega. \quad (8)$$

Consideriamo, per esempio, la superficie generata da una linea di Ribaucour, di indice n , che ruota intorno alla sua direttrice. Affinchè la superficie abbia le assintotiche reali bisogna supporre $n < -1$, perchè allora soltanto (III, 18) avviene che la curva rivolge costantemente la sua convessità verso l'asse. Intanto per $q = -\frac{1}{2}(n+1)\rho \cos \varphi$ la formola (6) dà $\operatorname{tg}^2 \omega = -\frac{1}{2}(n+1)$, vale a dire che *le assintotiche incontrano i meridiani sotto un angolo costante*. Poi dalle formole (7) e (8) si ha subito

$$s_0 = \frac{s}{\cos \omega}, \quad \rho_0 = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos^2 \omega} \rho \cot \varphi, \quad r_0 = \rho \operatorname{tg} \omega.$$

Notevole fra tutti è il caso della catenaria ($n = -3$). Allora la superficie si chiama *catenoide*, ed è caratterizzata fra le superficie di rotazione da $\omega = \pm \frac{1}{4}\pi$, cioè dal fatto che anche *le assintotiche formano un doppio sistema ortogonale*.

Dalle ultime formole, ricordando che l'equazione della catenaria è $\rho = a + \frac{s^2}{a}$, si ricava che *le assintotiche del catenoide sono definite dalle equazioni intrinseche*

$$\rho = s + \frac{2a^2}{s}, \quad r = a + \frac{s^2}{2a}.$$

8. Per lo studio delle *superficie applicabili* (XI, 25) *sulle superficie di rotazione* bisogna osservare che al quadrato dell'arco elementare su tali superficie si può sempre dar la forma $ds^2 + q^2 d\theta^2$, rappresentando con ds e $qd\theta$ gli archi elementari del meridiano e del parallelo di raggio q . Ogni volta che si riuscirà a stabilire sopra una superficie un sistema di linee coordinate, tali che il quadrato dell'arco elementare prenda la forma $dq_1^2 + f^2(q_1) dq_2^2$, si potrà affermare l'applicabilità della superficie stessa sopra una superficie di rotazione, e si saprà inoltre che nell'effettiva applicazione d'una superficie sull'altra le linee q_1 andranno a distendersi sui meridiani e le q_2 sui paralleli. Si trovano anzi infinite superficie di rotazione, sulle quali è applicabile la superficie data, giacchè, rappresentando con k una costante arbitraria, si può prendere $q_1 = s, q_2 = \theta; k, q = kf(s)$. Per sapere poi quali sono queste superficie basta *determinare l'equazione intrinseca del meridiano*, ed a ciò si perviene facilmente col derivare l'eguaglianza $q = kf(s)$,

tenendo conto delle (3):

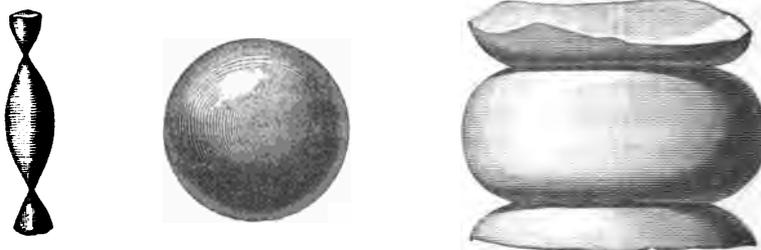
$$\operatorname{sen} \varphi = kf''(s) \quad , \quad \operatorname{cos} \varphi = k\rho f''(s) \quad .$$

Dunque l'equazione intrinseca cercata è

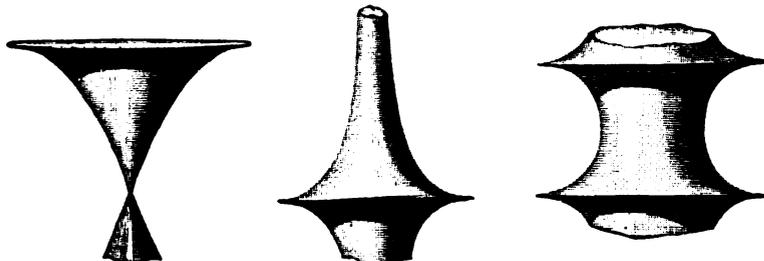
$$\rho = \pm \frac{\sqrt{1 - k^2 f'^2(s)}}{kf''(s)} \quad . \quad (9)$$

Le due superficie che corrispondono ai valori k e $k' > k$ sono applicabili l'una sull'altra; ma è facile vedere che per coprire interamente la prima basta una parte della seconda, terminata a due meridiani.

9. Superficie a curvatura totale costante. Di queste importanti superficie abbiamo già un esempio fra le superficie rigate, giacchè si è visto che in ogni punto d'una sviluppabile si ha $K=0$. Se il valore costante di K non è nullo, la superficie non può essere rigata, perchè nelle rigate storte la curvatura, diversa da zero sulla linea di stringimento, è nulla all'infinito. Esistono invece infinite superficie a curvatura costante positiva o negativa fra le superficie di rotazione,



e noi possiamo determinarle tutte. Infatti, affinchè sia costante $R_1 R_2$, la curvatura del meridiano dev'essere proporzionale al segmento di normale compreso fra il punto d'incidenza e l'asse di rotazione. Dunque il meridiano appartiene ad una classe di curve, già studiata nel secondo capitolo (7, m, n). Bisogna distinguere le superficie a curvatura costante *positiva* (che hanno le forme segnate qui sopra) dalle superficie a curvatura costante *negativa*, fra le quali è particolarmente notevole la *pseudosfera*, cioè la superficie generata da una trattrice (I, 8, b) che ruota intorno al suo assintoto. Questa superficie separa, per così dire,



i due tipi di superficie a curvatura negativa, come la *sfera* separa i due tipi di superficie a curvatura positiva. Le sue assintotiche si determinano subito ricordando che, se a è il segmento (costante) di tangente, staccato dall'asse a par-

tire dal punto di contatto, si ha

$$\operatorname{sen} \varphi = -e^{-\frac{s}{a}} \quad , \quad q = a \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad \rho = a \cot \varphi \quad ,$$

dimodochè la (6) dà $\omega = \pm \varphi$; poi da (7) e (8) si deduce

$$s_0 = a \log \cot \frac{\varphi}{2} \quad , \quad \rho_0 = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \varphi} \quad , \quad r_0 = a \quad .$$

Dunque le assintotiche della pseudosfera son definite dalle equazioni intrinseche

$$\rho = \frac{a}{4} (e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}) \quad , \quad r = a \quad .$$

Ognuna di queste curve tocca il parallelo massimo ($\varphi = \frac{1}{2}\pi$), ed estendendosi all'infinito ($\varphi = 0$) tende a confondersi con l'asse, intorno al quale gira indefinitamente: ciò si deduce anche dal fatto, facile a dimostrare, che ogni coppia di meridiani stacca archi uguali da un'assintotica qualunque e dal parallelo massimo. Bisogna poi notare che questo parallelo è una linea singolare, sulla quale cessa la validità di parecchie proposizioni della teoria generale; ed in particolare le linee assintotiche, nei loro punti di contatto col detto parallelo, si flettono più di quanto indica (§ 2) il teorema di Beltrami.

10. Le superficie trovate nel precedente paragrafo sono importanti anche perchè forniscono, col solo flettersi senza estendersi o contrarsi, tutte le superficie a curvatura costante. Presto, infatti, si vedrà che la condizione dell'uguaglianza fra le curvature nei punti corrispondenti, già (XI, 25) trovata *necessaria* per l'applicabilità d'una superficie sopra un'altra, è anche *sufficiente* quando si tratta di superficie a curvatura costante. In altri termini: *ogni superficie a curvatura costante è applicabile su qualunque altra superficie che ha la stessa curvatura*. Per dimostrare ciò prendiamo le linee q_1 fra le geodetiche della superficie, ed osserviamo che la formola di Gauss si riduce a

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial q_1^2} + K Q_2 = 0 \quad . \quad (10)$$

Se inoltre le linee q_1 si scelgono come nel § 24 del precedente capitolo, cioè concorrenti in un punto reale, dovrà essere

$$\lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{Q_2}{q_1} = 1 \quad , \quad \lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} = 1 \quad . \quad (11)$$

Con queste condizioni all'equazione (10) non si può soddisfare, per $K=0$, se non prendendo $Q_2 = q_1$, ed allora il quadrato dell'arco elementare ci si presenta sotto la forma $dq_1^2 + q_1^2 dq_2^2$; ma questa è appunto la forma di ds^2 nel piano, quando si fa uso di coordinate polari. Dunque, ricordando la proposizione ottenuta nel § 3, possiamo enunciare il seguente teorema: *affinchè una superficie sia applicabile sul piano occorre e basta che sia sviluppabile*. Le sviluppabili sono dunque le infinite forme che può prendere nello spazio un piano flessibile ed inestendibile. Se invece si suppone che K abbia un valore positivo $\frac{1}{a^2}$, si deve prendere $Q_2 = a \operatorname{sen} \frac{q_1}{a}$ per soddisfare all'equazione (10) ed alle condizioni (11).

Allora il quadrato dell'arco elementare prende la forma $dq_1^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{q_1}{a} dq_2^2$, unica per tutte le superficie la cui curvatura è $\frac{1}{a^2}$, fra le quali è sempre la sfera di raggio a , come del resto risulta anche dall'equazione (9), che per $k=1$ diventa $\rho = a$ quando vi si pone $f(s) = a \operatorname{sen} \frac{s}{a}$. Dunque *tutte le superficie a curvatura $\frac{1}{a^2}$ sono applicabili sulla sfera di raggio a* . In altri termini ogni superficie a curvatura costante positiva si può ottenere deformando una sfera flessibile ed inestendibile. Finalmente supponiamo che K abbia il valore $-\frac{1}{a^2}$. Allora per soddisfare alla (10) nel modo più generale bisogna prendere

$$Q_2 = \varphi(q_2) e^{\frac{q_1}{a}} + \psi(q_2) e^{-\frac{q_1}{a}}$$

con φ e ψ funzioni arbitrarie, le quali si possono sempre assegnare in modo che la superficie risulti applicabile sopra una superficie di rotazione, sia prendendone una eguale a zero ed incorporando l'altra in dq_2 , sia ponendole uguali fra loro, o pure prendendo $\varphi = -\psi$. Si perviene così alle seguenti forme di Q_2 :

$$\frac{a}{2} (e^{\frac{q_1}{a}} - e^{-\frac{q_1}{a}}) , \quad a e^{-\frac{q_1}{a}} , \quad \frac{a}{2} (e^{\frac{q_1}{a}} + e^{-\frac{q_1}{a}}) .$$

Ora son queste appunto (II, 7, n) le forme di q , che definiscono i tipi di superficie a curvatura costante negativa, trovati nel paragrafo precedente. Dunque *ogni superficie a curvatura costante negativa è applicabile in diversi modi sopra una pseudosfera e sulle altre superficie di rotazione che hanno la medesima curvatura*. Ma, delle tre forme trovate, soltanto la prima soddisfa alle condizioni (11), e però soltanto sopra una superficie del corrispondente tipo si potrà applicare la superficie se si vuole che sui meridiani vadano a distendersi tutte le geodetiche uscenti da un punto reale. Invece, se si attribuisce a Q_2 la seconda forma, si vede che q si annulla solo per q_1 infinito, e ciò vuol dire che il punto di concorso delle geodetiche si dovrà supporre infinitamente lontano sulla superficie. Finalmente q (o Q_2) si annulla, qualunque sia q_2 , anche quando per Q_2 si assume la terza forma, ma si annulla per un valore immaginario $q_1 = \frac{1}{2} \pi a \sqrt{-1}$. Si arriva così a vedere che *una superficie a curvatura costante negativa è sempre applicabile su qualunque superficie di rotazione che ha la stessa curvatura, in modo che un sistema qualunque di geodetiche concorrenti si applichi sul sistema dei meridiani*; e la superficie di rotazione dovrà appartenere ad uno dei noti tipi secondo che il punto di concorso delle geodetiche è reale e situato a distanza finita, reale ed infinitamente lontano, o pure immaginario. Naturalmente anche le superficie di rotazione appartenenti ad un tipo sono applicabili su quelle d'un altro tipo; ma, contrariamente a ciò che avviene per le superficie a curvatura positiva, i meridiani non restano meridiani, e si trasformano invece in un altro sistema di geodetiche concorrenti. Ciò si deve alla possibilità (che non ha riscontro sulla sfera) dell'esistenza di geodetiche che non s'incontrano o pure s'incontrano all'infinito. E se si vuole che la superficie si deformi conservando i meridiani, è necessario che conservi anche il proprio tipo, come del resto si verifica facilmente mediante la (9). Particolarmente notevole è la pseudosfera, che non può deformarsi, conservando i meridiani, se non scorrendo su sè stessa, vale

a dire che l'unica superficie di rotazione applicabile sulla pseudosfera, in modo che i meridiani si distendano sui meridiani, è la pseudosfera stessa. Infatti per

$f(s) = ae^{-\frac{s}{a}}$ l'equazione (9) diventa

$$\rho = \frac{a}{k} \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - k^2},$$

e questa rappresenta sempre la trattrice di parametro a , come si riconosce subito cambiando s in $s + a \log k$. Ciò si spiega facilmente osservando che solo nel caso della pseudosfera i paralleli hanno la curvatura geodetica costante $-\frac{1}{a}$, e che d'altra parte questa curvatura non può variare quando la superficie si deforma per semplice flessione.

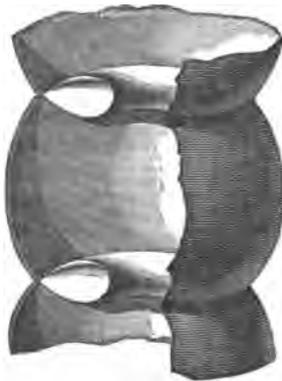
11. Superficie a curvatura media costante. Interessanti questioni di fisica conducono alla considerazione di queste superficie, fra le quali sono particolarmente notevoli gli *elassoidi*, o superficie a curvatura media nulla. L'eguaglianza $H=0$ ci dice subito che l'indicatrice di Dupin è, in ogni punto, un'iperbole equilatera, e che per conseguenza *gli elassoidi sono caratterizzati dal fatto che le loro assintotiche costituiscono un sistema doppio ortogonale*. Ora, riferendoci ad un precedente risultato, possiamo affermare che *l'unico elassoide di rotazione è il catenoide*, come si riconosce anche ricordando (II, 7, e) che la catenaria è caratterizzata dalla proprietà di avere, in ogni punto M , il centro di curvatura simmetrico, rispetto ad M , del punto d'incontro della normale con la direttrice. È facile rispondere alla questione più generale: *quali superficie di rotazione hanno la curvatura media costante?* Indicando con $-\frac{1}{a}$ il valore costante di H , la curvatura del meridiano deve soddisfare all'eguaglianza

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{a} = \frac{\cos \varphi}{q},$$

dalla quale (V, 3, f) apprendiamo subito che *le superficie richieste sono generate dalla rotazione delle curve di Delaunay intorno alle rispettive direttrici*.



Secondo che la curva appartiene al tipo ellittico o al tipo iperbolico, la superficie si chiama *onduloide* o *nodoide*. In virtù d'una nota proprietà delle curve di Delaunay è chiaro che all'onduloide ed al nodoide sono parallele le due superficie del primo tipo trovato nel §9; ma questa proprietà vale in forma più generale e ci rivela un intimo nesso fra le superficie a *curvatura media* costante e quelle a *curvatura totale* costante. Infatti, se ad una superficie su cui si



ha $R_1 R_2 = a^2$ si conducono, alle distanze a e $-a$, le superficie parallele, que-

ste hanno i raggi principali $R_1 \mp a$ ed $R_2 \mp a$; e poichè

$$\frac{1}{R_1 \mp a} + \frac{1}{R_2 \mp a} = \mp \frac{1}{a},$$

si vede che le due superficie sono a curvatura media costante.

12. Per tutte le superficie a curvatura media costante sussiste la proprietà: *le linee di curvatura costituiscono un sistema isoterma*. Infatti dalle prime due formole di Codazzi si ricavano subito le curvatures geodetiche sotto la forma

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\partial f}{\partial s_1} - \frac{\partial g}{\partial s_2}, \quad \mathcal{G}_2 = -\frac{\partial f}{\partial s_2} - \frac{\partial g}{\partial s_1}, \quad (12)$$

in cui $f=0$, $g = \frac{1}{2} \log(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)$; ed è noto (XI, 22) che basta la prima eguaglianza ($f=0$, anzi $\Delta^2 f=0$) perchè il teorema sia dimostrato. Per un ellassoide il teorema sussiste anche quando si considerano le assintotiche invece delle linee di curvatura. Infatti, se si prendono le assintotiche come linee coordinate, dalle predette formole di Codazzi risultano i valori delle curvatures geodetiche sotto la forma (12), con $f=0$, $g = \frac{1}{2} \log \mathcal{E}$. Dunque *le assintotiche di qualunque ellassoide costituiscono un sistema isoterma*. Del resto questo teorema è un'immediata conseguenza del precedente, giacchè con $\omega = \frac{1}{4}\pi$ si soddisfa (cfr. XI, 22) certamente a $\Delta^2 \omega = 0$. Ad un'altra proprietà caratteristica degli ellassoidi si giunge cercando di rispondere alla domanda: *quali doppi sistemi ortogonali di curve restano ortogonali nella rappresentazione sferica?* Ciò equivale (XI, 14, 15) a chiedersi quando è che una coppia ortogonale di diametri d'una conica è coniugata ad un'altra coppia ortogonale. Ora noi sappiamo che i soli assi hanno questa proprietà, a meno che la conica non sia un'iperbole equilatera, nel qual caso (III, 4) la proprietà appartiene ad ogni coppia di diametri perpendicolari. Dunque, in generale, *le linee di curvatura costituiscono l'unico sistema che si conservi ortogonale nella rappresentazione sferica, e soltanto sugli ellassoidi avviene che ogni altro doppio sistema si conserva ortogonale*. Del resto, se si osserva che le deviazioni di due linee perpendicolari sono definite dalle tangenti trigonometriche $-\mathcal{E}:\mathcal{N}$ e $\mathcal{E}:\mathcal{N}'$, un calcolo facile mostra che l'aumento dell'angolo delle due curve, nella rappresentazione sferica, ha la tangente $(R_1 + R_2)\mathcal{E}$. Dunque, se si vuole che l'angolo resti uguale ad $\frac{1}{2}\pi$, mentre $\mathcal{E} \leq 0$, bisogna che sia $H=0$.

13. Ora domandiamoci: *esistono ellassoidi fra le superficie rigate?* Uno dei due sistemi di assintotiche è necessariamente costituito dalle generatrici rettilinee, le quali sono anche geodetiche, dimodochè si ha $\mathcal{N}_1 = \mathcal{G}_1 = 0$. L'altro sistema è formato dalle traiettorie ortogonali delle generatrici, per le quali curve già si è visto (§ 5) che si ha

$$\mathcal{G}_2 = \frac{t}{t^2 + p^2}, \quad \mathcal{E} = -\frac{p}{t^2 + p^2}. \quad (13)$$

Intanto, poichè dev'essere anche $\mathcal{N}_2 = 0$, la prima formola di Codazzi mostra che \mathcal{E} è funzione del solo parametro q_1 , e però p e $t - q_1$, che non dipendono da q_1 , sono costanti. Ciò premesso, sulla linea di stringimento si ha $t=0$, e conseguente-

mente $\mathcal{Q}_2 = 0$. Dunque la linea stessa, assintotica e geodetica, è retta, vale a dire che le generatrici incontrano ortogonalmente una retta fissa dello spazio. Quando si fa variare soltanto $s_2 = s$, t conserva un valore costante b , e le formole (13) danno, per misurare le curvature di qualunque traiettoria ortogonale delle generatrici, i valori costanti

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{r} = -\frac{a}{a^2 + b^2},$$

rappresentando con a il valore costante di p . Dunque (X, 4) le assintotiche curvilinee della superficie sono eliche circolari. Finalmente, se si applicano le formole fondamentali alla direzione della generatrice ($\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$) nell'ipotesi che l'origine si sposti lungo un'assintotica curvilinea qualunque, si trova $\delta\alpha = \delta\beta = 0$, $\delta\gamma = -\mathcal{E}ds$; poi, per $t = 0$, si vede che l'angolo di cui ruota la generatrice intorno all'asse di stringimento è $s:a$, cioè varia proporzionalmente al segmento percorso sul detto asse dal piede della generatrice. Si giunge così (IX, 7, h) al seguente teorema di Catalan: *l'unico elassoide rigato è l'elicoide a piano direttore*. Del resto questo teorema risulta immediatamente dal fatto che la predetta superficie è l'unica (X, 9) che abbia più di due assintotiche ortogonali alle generatrici.

14. Per sapere su quali superficie rigate le traiettorie ortogonali delle generatrici sono (come nell'elicoide a piano direttore) linee a curvatura geodetica costante, bisogna vedere quando è che la curvatura \mathcal{Q}_2 , data dalla prima formola (13), si riduce ad una funzione del solo parametro q_1 . Perchè ciò avvenga è necessario che le quantità p e $t - q_1$, sempre indipendenti da q_1 , restino costanti: sia $p = a, t = q_1$. La linea di stringimento ($t = 0$) è dunque una linea q_2 , ed è una geodetica ($\mathcal{Q}_2 = 0$), d'onde segue che ammette le generatrici come binormali. Inoltre $-\mathcal{E}$, che conserva il valore $\frac{1}{a}$ lungo tutta la linea di stringimento, rappresenta la torsione della linea stessa. Dunque le superficie cercate son quelle *costituite dalle binormali delle linee a torsione costante*. Per tutte queste superficie, essendo

$$\frac{\partial \log \mathcal{Q}_2}{\partial q_1} = \frac{q_1}{q_1^2 + a^2}$$

e conseguentemente $\mathcal{Q}_2 = \sqrt{q_1^2 + a^2}$, il quadrato dell'arco elementare prende la forma unica $dq_1^2 + (q_1^2 + a^2)dq_2^2$. Dunque le superficie di cui si tratta *sono applicabili sull'elicoide a piano direttore*. È poi evidente che sono applicabili anche sopra superficie di rotazione, delle quali si determina la forma prendendo $f(s) = \sqrt{s^2 + a^2}$ in (9). Per $k = 1$ questa equazione diventa $\rho = a + \frac{s^2}{a}$, e però *l'elicoide a piano direttore è applicabile sul catenoide*. In altri termini, se si flette un catenoide inestendibile rettificandone il parallelo minimo, i meridiani si rettificano per costituire un elicoide a piano direttore.

15. **Quadriche.** Per lo studio intrinseco d'una superficie, rappresentata da un'equazione del secondo grado fra le coordinate relative ad assi immobili, si cominci dall'osservare (cfr. III, 6) che, se si pone l'origine sulla superficie, dirigendo l'asse x secondo la normale, e se si deriva l'equazione esprimendo l'immobilità dei

punti (x, y, z) mediante le solite condizioni (XI, form. 8), si deve ritrovare l'equazione da cui si è partiti. Ciò premesso, ricordandosi che per $x=y=z=0$ i soli quozienti $\frac{\partial x}{\partial s_1}$ e $\frac{\partial y}{\partial s_2}$ prendono il valore -1 , mentre tutti gli altri si annullano, si riconosce subito che la parte lineare nell'equazione proposta deve ridursi a z ; poi si vede, per $z=0$, che la superficie è tagliata dal piano tangente secondo due rette, reali o immaginarie: *essa è dunque (IX, 7, d) una quadrica*. Lasciamo al lettore la cura di dimostrare la proposizione reciproca. Se gli assi x ed y si dirigono tangenzialmente alle linee di curvatura deve mancare anche il termine in xy , dimodochè l'equazione si riduce finalmente alla forma

$$z = \frac{1}{2}(\mathcal{O}_1 x^2 + \mathcal{O}_2 y^2 + \gamma z^2) + (\alpha x + \beta y)z . \quad (14)$$

Dopo averla derivata una volta rispetto a q_1 , ed un'altra rispetto a q_2 , bisogna identificarla con ciascuna delle due equazioni derivate, considerando i coefficienti di y^2 per la prima e quelli di x^2 per l'altra. In tal modo si ottiene

$$\alpha = \frac{1}{\mathcal{O}_2} \frac{\partial \mathcal{O}_2}{\partial s_1} , \quad \beta = \frac{1}{\mathcal{O}_1} \frac{\partial \mathcal{O}_1}{\partial s_2} . \quad (15)$$

Paragonando invece il coefficiente di x^2 nella prima equazione e quello di y^2 nella seconda agli analoghi coefficienti dell'equazione primitiva, si ottengono i valori

$$\alpha = \frac{1}{3\mathcal{O}_1} \frac{\partial \mathcal{O}_1}{\partial s_1} , \quad \beta = \frac{1}{3\mathcal{O}_2} \frac{\partial \mathcal{O}_2}{\partial s_2} ;$$

ed uguagliando questi ai precedenti si ritrova, integrando, una proprietà caratteristica (XI, 17) delle quadriche, cioè l'indipendenza dei rapporti $\mathcal{O}_2^3 : \mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_1^3 : \mathcal{O}_2$ da q_1 e q_2 rispettivamente. Ora si è naturalmente condotti a scegliere i parametri delle linee di curvatura ponendo

$$\mathcal{O}_1 = q_1^3 q_2 , \quad \mathcal{O}_2 = q_1 q_2^3 ,$$

dopo di che i valori (15) diventano

$$\alpha = \frac{1}{Q_1 q_1} , \quad \beta = \frac{1}{Q_2 q_2} .$$

Intanto dalle prime due formole di Codazzi risulta

$$\frac{\partial \log Q_1}{\partial q_2} = -\frac{q_1^2}{q_2(q_1^2 - q_2^2)} , \quad \frac{\partial \log Q_2}{\partial q_1} = \frac{q_2^2}{q_1(q_1^2 - q_2^2)} , \quad (16)$$

d'onde, integrando, si traggono Q_1 e Q_2 ; poi

$$\alpha = \frac{q_1 q_2 \varphi(q_1)}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2}} , \quad \beta = \frac{q_1 q_2 \psi(q_2)}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2}} .$$

Qui si osservi che il rapporto di Q_1 a Q_2 risulta uguale al prodotto d'una funzione di q_1 per una funzione di q_2 . Dunque *sulle quadriche le linee di curvatura costituiscono un sistema isoterma*. Per determinare γ basta paragonare il coeffi-

ciente di x^2 nell'equazione primitiva a quelli delle due derivate, ed integrare le equazioni che in tal modo si ottengono:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s_1} = \alpha(\gamma - 2\mathcal{O}_1) \quad , \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} = \beta(\gamma - 2\mathcal{O}_2) .$$

Si giunge così a trovare

$$\gamma = -q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2 - A) ,$$

e per conoscere completamente tutti i coefficienti dell'equazione (14) in funzione delle q ci resta soltanto da precisare le funzioni φ e ψ . All'uopo si paragonino il coefficiente di αx nella prima equazione derivata, e quello di βz nella seconda, agli analoghi coefficienti dell'equazione primitiva, e nelle uguaglianze così ottenute

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = \alpha^2 - \beta \mathcal{O}_1 + \gamma \mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_1^2 \quad , \quad \frac{\partial \beta}{\partial s_2} = \beta^2 - \alpha \mathcal{O}_2 + \gamma \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2^2$$

si sostituiscano i precedenti valori di α, β, γ e delle \mathcal{O} . Con facili considerazioni si riconosce che, posto

$$f(x) = x^2 - Ax^2 + Bx - C ,$$

si deve prendere

$$\varphi(q_1) = \sqrt{-f(q_1^2)} \quad , \quad \psi(q_2) = \sqrt{f(q_2^2)} ,$$

e con ciò si ha quanto occorre per lo studio intrinseco delle quadriche.

16. Fissato per z un valore qualunque, l'equazione (14) rappresenta una conica, che degenera in una coppia di rette per quei valori di z che ne annullano il discriminante

$$\begin{vmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 & \alpha z \\ 0 & \mathcal{O}_2 & \beta z \\ \alpha z & \beta z & \gamma z^2 - 2z \end{vmatrix} = q_1^2 q_2^2 z (Cz - 2q_1 q_2) ,$$

cioè per $z=0$ e per $Cz=2q_1 q_2$. Dunque ogni sezione piana d'una quadrica è una conica, e per ciascuna direzione esistono due sezioni degeneri, i cui piani toccano evidentemente la superficie. Così vediamo, lasciando da parte la discussione dei casi eccezionali, che ad ogni punto M corrisponde un punto N , le cui coordinate, rispetto al triedro fondamentale che ha l'origine in M , sono definite dalle condizioni

$$\mathcal{O}_1 x + \alpha z = 0 \quad , \quad \mathcal{O}_2 y + \beta z = 0 \quad , \quad Cz = 2q_1 q_2 ;$$

e la corrispondenza fra i due punti è tale che, in essi, i piani tangenti alla quadrica sono paralleli. Dopo ciò è chiaro che, se la superficie possiede un centro, questo deve dividere per metà la corda MN , e però si potrà dire che il centro esiste, e che le sue coordinate sono

$$x_0 = -\frac{q_2}{Cq_1} \sqrt{\frac{f(q_1^2)}{q_2^2 - q_1^2}} \quad , \quad y_0 = -\frac{q_1}{Cq_2} \sqrt{\frac{f(q_2^2)}{q_1^2 - q_2^2}} \quad , \quad z_0 = \frac{q_1 q_2}{C} \quad , \quad (17)$$

dopo aver verificato (come facilmente si può) che queste coordinate soddisfano alle

condizioni d'immobilità. Affinchè M sia un *vertice* bisogna che si abbia $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, ed allora z_0 rappresenta la lunghezza del corrispondente semi-asse. Dunque, se λ, μ, ν sono le radici di f , supposte distinte, si definisce una delle tre coppie di vertici, e quindi uno dei tre assi, prendendo (per esempio) $q_1^2 = \lambda$, $q_2^2 = \mu$, nel qual caso la lunghezza c del semi-asse sarà data da $C^2 c^2 = \lambda\mu$. Dunque, se si osserva che $C = \lambda\mu\nu$, si vede che i quadrati dei semi-assi sono

$$a^2 = \frac{1}{C\lambda}, \quad b^2 = \frac{1}{C\mu}, \quad c^2 = \frac{1}{C\nu},$$

e che per conseguenza il valore della costante C è inverso di \sqrt{abc} . Che i tre assi costituiscano una terna ortogonale risulta dalla simmetria stessa della forma che prende l'equazione (14) quando l'origine delle coordinate si trasferisce nel centro della superficie. Si ottiene infatti, cambiando x in $x + c$ ed osservando che A è uguale a $\lambda + \mu + \nu$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad (18)$$

ed è poi facile servirsi di questa equazione per discutere le varie forme di quadriche reali, corrispondentemente alle ipotesi di *tre* o *due* coppie di vertici reali, o di *una* coppia sola. Nel primo caso si ha l'*ellissoide*, nel secondo l'*iperboloide ad una falda* e nel terzo l'*iperboloide a due falde*. Intanto si noti che la linea di curvatura, definita dall'equazione $q_1^2 = \lambda$, passa per le due coppie di vertici, corrispondenti ai valori μ e ν dell'altro parametro q_2^2 ; e poichè si ha $\mathcal{Q}_2 = 0$, la linea considerata è piana (XI, 2). Dunque le tre sezioni diametrali principali, cioè le sezioni fatte dai piani principali (piani che passano per due assi) sono linee di curvatura ed insieme geodetiche della superficie. Ciò è del resto evidente se si riflette che le normali alla superficie, lungo una sezione diametrale principale, stanno tutte nel piano della sezione, o pure se si osserva che i piani principali tagliano la superficie ad angolo retto; ma da ciò che si è detto prima risulta ancora che le tre curve sono caratterizzate dal fatto che, lungo ciascuna di esse, il quadrato d'un parametro si conserva costantemente uguale ad una radice di f .

17. Si definiscono gli *ombelichi* ($\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$) prendendo $q_1^2 = q_2^2 = \lambda, \mu, \nu$, successivamente, nel qual caso x_0 ed y_0 diventano indeterminati, ma

$$C^2(x_0^2 + y_0^2) = -\lambda^2 + B - \frac{2C}{\lambda} = -f'(\lambda),$$

dimodochè, per fissare la posizione del centro rispetto al piano tangente ed alla normale in un ombelico, si hanno le formole

$$x_0^2 = \pm abc\lambda^2, \quad x_0^2 + y_0^2 = \pm abc f'(\lambda),$$

e si trova così che le distanze del centro ai piani tangenti negli ombelichi (reali o immaginari) sono $bc : a, ca : b, ab : c$, mentre le distanze alle corrispondenti normali sono

$$\pm \frac{1}{a} \sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}, \quad \pm \frac{1}{b} \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}, \quad \pm \frac{1}{c} \sqrt{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}$$

Evidentemente gli ombelichi stanno sulle tre sezioni diametrali principali, ma non

sono tutti reali. Così, per esempio, nel caso dell'ellissoide, supponendo $a > b > c$, i soli ombelichi reali sono i quattro punti definiti da $q_1^2 = q_2^2 = \mu$; questi appartengono alla sezione determinata dagli assi minimo e massimo, e sono definiti da questa circostanza e dal fatto che la loro distanza al centro è $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$, minore di a e maggiore di c . Gli altri ombelichi sono immaginari appunto perchè appartengono alle sfere, concentriche all'ellissoide, descritte con raggi $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} < c$, $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} > a$, e delle quali, per conseguenza, la prima è troppo piccola, la seconda troppo grande per tagliare l'ellissoide. I quattro ombelichi reali si associano in due coppie, F, G, ed F', G', di punti diametralmente opposti, ed i piani tangenti in questi punti distano tutti per $ac : b$ dal centro dell'ellissoide. Le sole sezioni circolari (reali) della superficie stanno evidentemente in piani paralleli ai detti piani tangenti, e due di esse, cioè quelle situate in piani diametrali, hanno il raggio b . Anche l'iperboloide a due falde ha due sole coppie di ombelichi reali, una per ciascuna falda; ma gli ombelichi dell'altro iperboloide son tutti immaginari.

18. *La curvatura d'una quadrica, in un punto M, è proporzionale alla quarta potenza della distanza del centro dal piano tangente in M.* Infatti

$$K = \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 = q_1^4 q_2^4 = \frac{x_0^4}{a^2 b^2 c^2} .$$

Qui si noti che soltanto gli iperboloide ad una falda ($a^2 b^2 c^2 < 0$) hanno la curvatura negativa, e sono, per conseguenza, le sole quadriche a centro, generate da rette reali. Già sappiamo che, quando M si allontana indefinitamente dalla posizione centrale, lungo una generatrice, K tende a zero, e però anche x_0 deve tendere a zero, cioè il piano tangente finisce per contenere il centro. Dunque *la sviluppabile assintotica (§ 5) d'una quadrica è un cono col vertice nel centro.* Se il cono si riferisce al vertice ed ai piani principali, la sua equazione è manifestamente la stessa (18), in cui si pone 0 al posto di 1 nel secondo membro. Con tale equazione si vede subito che il cono assintotico, immaginario solo nel caso dell'ellissoide, è interamente circondato dall'iperboloide ad una falda, ma circonda invece, separandole, le due falde dell'altro iperboloide. Quando poi M, percorrendo una data generatrice, va ad occupare la posizione centrale, la distanza x_0 diventa massima, e però *i piani che toccano una quadrica lungo la linea di stringimento sono normali alle perpendicolari abbassate dal centro sulle generatrici.* Dunque, se M appartiene alla linea di stringimento (luogo dei punti centrali delle generatrici dei due sistemi) si ha $y_0 = x_0 \operatorname{tg} \omega$, con ω soddisfacente alla condizione $\mathcal{N} = 0$, ossia $q_1^2 \cos^2 \omega + q_2^2 \sin^2 \omega = 0$, che definisce l'inclinazione delle generatrici sulle linee di curvatura. Ne segue che la linea di stringimento è caratterizzata dalla relazione $q_1^2 x_0^2 + q_2^2 y_0^2 = 0$, e però, ponendo per x_0 ed y_0 i valori (17), si vede che *la sua equazione in coordinate curvilinee è*

$$q_1^2 q_2^2 (q_1^2 + q_2^2 - A) + C = 0 . \quad (19)$$

Questa equivale a $\gamma z_0 = 1$, ed esprime che *le proiezioni del centro sulle normali alla linea di stringimento dividono per metà i segmenti staccati dalla superficie sulle normali stesse.* Risulta infatti dalla (14) che la lunghezza di tali segmenti è $2 : \gamma = 2x_0$. Mediante l'equazione (19) si può studiare senza difficoltà

la linea di stringimento, che passa per tutti i vertici, inflettendosi, ed è simmetrica rispetto ai piani principali.

19. Fra le curve tracciate sopra una quadrica sono notevoli le *poloidi*, cioè le curve definite dalla seguente proprietà: *i piani tangenti lungo una poloide distano egualmente dal centro*. Per le cose dette innanzi è chiaro che *la curvatura d'una quadrica è costante lungo ciascuna poloide*. Se si osserva che l'equazione di queste curve, in coordinate curvilinee, è $q_1 q_2 = \text{costante}$, e che d'altra parte si ha

$$\frac{\partial}{\partial s} \log q_1 q_2 = \alpha \cos \omega + \beta \sin \omega ,$$

si vede che l'inclinazione ω d'una poloide sopra una linea di curvatura è data dalla formola

$$\operatorname{tg} \omega = - \frac{\varphi(q_1)}{\psi(q_2)} .$$

La sostituzione di questo valore di ω nelle formole (12), (15) e (19) del capitolo precedente fornisce tutti gli elementi necessari per lo studio intrinseco delle poloidi. Ad un'altra proprietà di queste curve si perviene osservando che la sezione fatta nella quadrica dal piano diametrale parallelo al piano tangente è rappresentata dall'equazione $\mathcal{O}_1 x^2 + \mathcal{O}_2 y^2 = z_0$, dimodochè i quadrati dei semi-assi di tale sezione sono

$$\frac{z_0}{\mathcal{O}_1} = \frac{1}{Cq_1^2} , \quad \frac{z_0}{\mathcal{O}_2} = \frac{1}{Cq_2^2} .$$

Ne segue che i parametri q_1 e q_2 sono inversamente proporzionali ai semi-assi della sezione stessa. Questa è un'ellisse reale nel caso dell'ellissoide, ed allora si può dire che, *se un punto percorre una poloide, la sezione diametrale parallela al piano tangente conserva un'area costante*. Finalmente un calcolo facile mostra che *le sezioni normali, fatte nell'ellissoide tangenzialmente ad ogni poloide, hanno un vertice nel punto di contatto*.

20. Se si moltiplica per z_0 la lunghezza del semi-asse parallelo ad Mx si ottiene un valore indipendente da q_1 . Dunque: *lungo le linee di curvatura d'una quadrica è costante il prodotto del diametro parallelo alla tangente per la distanza del centro al piano tangente*. Ora domandiamoci: è questa una proprietà caratteristica delle linee di curvatura? Per le cose dette (XI, 13) sull'indicatrice di Dupin si vede subito che la lunghezza l del semi-diametro parallelo ad una tangente qualunque, inclinata di ω su Mx , è data dalla formola

$$l^2 = \frac{z_0}{\mathcal{O}_0} = \frac{1}{C(q_1^2 \cos^2 \omega + q_2^2 \sin^2 \omega)} ,$$

e che per conseguenza la proprietà enunciata appartiene a tutte le curve, lungo le quali si ha

$$\frac{\cos^2 \omega}{q_2^2} + \frac{\sin^2 \omega}{q_1^2} = \text{costante} .$$

Intanto, se al primo membro si applica l'operazione

$$\frac{\partial}{\partial s} = q_1 \alpha \cos \omega \frac{\partial}{\partial q_1} + q_2 \beta \sin \omega \frac{\partial}{\partial q_2},$$

si ottiene facilmente

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\cos^2 \omega}{q_2^2} + \frac{\sin^2 \omega}{q_1^2} \right) = - \left(\frac{\alpha \sin \omega}{q_1^2} + \frac{\beta \cos \omega}{q_2^2} + \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 q_2^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) \sin 2\omega,$$

ed alla quantità fra parentesi, nel secondo membro, si può anche dar la forma

$$\frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 q_2^2} \left(\mathcal{C}_2 \sin \omega - \mathcal{C}_1 \cos \omega + \frac{\partial \omega}{\partial s} \right),$$

giacchè si ha, in virtù di (16);

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\beta q_1^2}{q_2^2 - q_1^2}, \quad \mathcal{C}_2 = \frac{\alpha q_2^2}{q_1^2 - q_2^2}.$$

Dunque, ricordando la prima formola (19) del capitolo precedente,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\cos^2 \omega}{q_2^2} + \frac{\sin^2 \omega}{q_1^2} \right) = \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 q_2^2} \mathcal{C} \sin 2\omega, \quad (20)$$

e però la proprietà enunciata non appartiene soltanto alle *linee di curvatura* ($\omega = 0, \omega = \frac{1}{2}\pi$), ma, come ha osservato Joachimsthal, anche alle *geodetiche* ($\mathcal{C} = 0$). In ogni caso la formola (20) serve a calcolare la curvatura geodetica d'una linea qualunque, tracciata sopra una quadrica.

21. Importanti conseguenze del teorema di Joachimsthal sono state segnalate da Roberts. Consideriamo un ellissoide, e mediante geodetiche congiungiamone un punto qualunque M a due ombelichi reali, non diametralmente opposti, per esempio F ed F'. Lungo l'una o l'altra geodetica il prodotto lx_0 conserva un valore costante, e poichè, per le cose dette in fine del § 17, il valore di lx_0 è *ac* tanto in F quanto in F', anche in M dovrà lx_0 , e per conseguenza l , avere un valore unico. Ora, se si riflette al significato di l , si vede subito che le tangenti alle due geodetiche, in M, sono egualmente inclinate sugli assi dell'indicatrice di Dupin. Dunque *le linee di curvatura d'un ellissoide, in ogni punto M, dividono per metà gli angoli delle geodetiche congiungenti M a due ombelichi non diametralmente opposti*. Per conseguenza MF ed MG sono archi d'una stessa geodetica, e poichè M è un punto preso ad arbitrio sulla superficie, si vede che *le infinite geodetiche uscenti da un ombelico concorrono nell'ombelico diametralmente opposto*. Risulta inoltre dalla proprietà essenziale (XI, 8) delle geodetiche che, computata lungo una geodetica qualunque, la distanza dei due ombelichi è sempre la stessa. Dopo ciò è chiaro che se un filo flessibile, ma inestendibile, si tende sopra un ellissoide perfettamente levigato, lungo la sezione principale media, l'ellissoide può liberamente girare, come una sfera, intorno ad FG o ad F'G', deformando il filo, ma senza che questo cessi un solo istante di rimanere teso sulla superficie. Nel caso generale accade invece che il filo abbandona la superficie, o pure è trascinato nel moto restando rigidamente fissato ad essa. Vogliamo finalmente segnalare un'altra importante proprietà, che ci limitiamo ad

enunciare: *le linee di curvatura d'un ellissoide sono i luoghi dei punti, le cui distanze geodetiche a due ombelichi non diametralmente opposti hanno una somma o una differenza costante.* Esse sono dunque, per così dire, le ellissi e le iperboli della superficie; quelle che si possono considerare come ellissi rispetto ai fuochi F ed F' sono ad un tempo iperboli rispetto ad F e G' ; e viceversa. Ne segue che uno stilo che si muova mantenendo teso un filo flessibile ed inestendibile, fissato per gli estremi in F ed in F' , inciderà sulla superficie una linea di curvatura, ed in tal modo, accrescendo o diminuendo la lunghezza del filo, si riuscirà a tracciare meccanicamente tutte le linee di curvatura d'un sistema; per quelle dell'altro basterà fissare gli estremi del filo in F ed in G' , o in F' e G .

22. Superficie di Weingarten. Le superficie di rotazione, le superficie a curvatura media o totale costante, e molte altre superficie notevoli appartengono ad una classe unica, caratterizzata dal fatto dell'*esistenza d'una relazione fra le curvature principali.* Tutte queste superficie si dicono di Weingarten, dal nome del geometra che ne ha scoperte le più importanti proprietà. Noi qui ci limiteremo a dimostrare pochi teoremi, relativi specialmente alle sviluppate di tali superficie. Ricordiamo (XI, 26) che le curvature normali e la torsione geodetica della prima falda della sviluppata d'una superficie qualunque si determinano mercè le formole

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \mathcal{G}'_1 = \frac{1}{R_1}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_1} \mathcal{E}' = \mathcal{G}_1, \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_1} \mathcal{G}'_2 = \frac{R_2}{l} \left(\mathcal{G}_2 \frac{\partial R_1}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1 \frac{\partial R_1}{\partial s_2} \right),$$

dalle quali si deduce, tenendo conto delle formole (30) del precedente capitolo,

$$K' = \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 - \mathcal{E}'^2 = -\frac{1}{l^2} \frac{\partial R_2}{\partial R_1} \frac{\partial R_2}{\partial s_1}.$$

Per ottenere il valore K'' della curvatura nel corrispondente punto della seconda falda basta scambiare fra loro, nella precedente espressione, R_1 con R_2 ed s_1 con s_2 ; poi si trova

$$K'K'' = \frac{1}{l^4} \frac{\partial R_1}{\partial R_1} \frac{\partial R_2}{\partial R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2}.$$

D'altra parte, perchè una superficie sia di Weingarten, occorre e basta, in virtù della definizione, che sia nullo il determinante funzionale delle R , cioè che si abbia

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \frac{\partial R_2}{\partial s_2} - \frac{\partial R_1}{\partial s_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1} = 0,$$

e conseguentemente $K'K'' = 1:l^4$. Si trova così il seguente teorema di Halphen: *perchè una superficie appartenga alla classe delle superficie di Weingarten è necessario e sufficiente che il prodotto delle curvature delle falde della sviluppata, in due punti corrispondenti, sia inverso della quarta potenza della distanza dei punti stessi.* Un'altra proprietà caratteristica è stata scoperta da Ri-

b a u c o u r nel cercare la condizione perchè alle assintotiche d'una falda corrispondano quelle dell'altra. Sia ω l'inclinazione sulle linee di curvatura di (M) della curva che deve percorrere M affinchè il corrispondente centro C_1 descriva un'assintotica di (C_1) ; e sia ω' l'inclinazione di questa linea assintotica sulla tangente Mz . Fra ω ed ω' sussiste una relazione, che si deduce facilmente dalle formole (27) del precedente capitolo dividendo la terza per la seconda:

$$\frac{l}{R_2} \cot \omega' = \frac{\partial R_1}{\partial s_1} \cot \omega + \frac{\partial R_1}{\partial s_2}.$$

Ora, se si vuole determinare ω in modo che C_1 descriva un'assintotica di (C_1) , bisogna che si abbia

$$\mathcal{G}'_1 \cot^2 \omega' - 2\mathcal{E}' \cot \omega' + \mathcal{G}'_2 = 0,$$

cioè, sostituendo per le \mathcal{G}' , per \mathcal{E}' e per ω' i valori precedentemente ottenuti,

$$\cot \omega = \pm \frac{lR_1}{R_2} \sqrt{-K'}.$$

Affinchè sulle due falde si corrispondano le assintotiche, vale a dire perchè spostandosi M nella direzione definita dall'angolo ω con Mx (o $1/2\pi - \omega$ con My) i centri C_1 e C_2 tendano a spostarsi sulle assintotiche delle rispettive falde, bisogna che si abbia, per lo stesso valore di ω ,

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \mp \frac{lR_2}{R_1} \sqrt{-K''},$$

quindi $K'K'' = 1:l^4$. Dunque: *affinchè sulle due falde della sviluppata d'una superficie si corrispondano le assintotiche occorre e basta che la superficie appartenga alla classe di Weingarten.*

23. In modo analogo si potrebbe cercare la condizione perchè vi sia corrispondenza fra le linee di curvatura delle due falde; ma questa ed altre ricerche si compiono con maggiore facilità prendendo a studiare direttamente la corrispondenza fra le due falde, val quanto dire fra una superficie qualunque (M) ed una sua complementare (M'). Consideriamo sulla prima superficie un sistema di geodetiche curvilinee ($\mathcal{G}_1 \leq 0$), ed assumiamo queste come linee q_1 , dimodochè, chiamata l la distanza MM' , sia

$$\mathcal{G}_1 = 0, \quad \mathcal{G}_2 = -\frac{1}{l};$$

ed intanto osserviamo che per la terza formola di Gauss la funzione l è vincolata alla curvatura di (M) mediante l'equazione differenziale

$$\frac{\partial l}{\partial s_1} + 1 = -Kl^2. \quad (21)$$

Ciò premesso, le formole fondamentali, applicate al punto M', le cui coordinate sono $x=l, y=z=0$, danno

$$\begin{aligned} \frac{\delta x}{\delta s_1} &= \frac{\partial l}{\partial s_1} + 1, & \frac{\delta y}{\delta s_1} &= 0, & \frac{\delta z}{\delta s_1} &= \mathcal{G}_1 l, \\ \frac{\delta x}{\delta s_2} &= \frac{\partial l}{\partial s_2}, & \frac{\delta y}{\delta s_2} &= 0, & \frac{\delta z}{\delta s_2} &= -\mathcal{E} l. \end{aligned}$$

Dunque in M' l'asse z' , normale alla superficie (M'), è parallelo all'asse y ; e se si dirige l'asse y' parallelamente ad Mx , e l'asse x' in senso inverso di Mx , si perviene facilmente, procedendo come nel § 26 del precedente capitolo, alle relazioni

$$-k \frac{\partial}{\partial s'_1} = \mathcal{E} \frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1 \frac{\partial}{\partial s_2}, \quad kl \frac{\partial}{\partial s'_2} = \frac{\partial l}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial s_1} - \left(\frac{\partial l}{\partial s_1} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial s_2},$$

in cui per brevità si è posto

$$k = \mathcal{E} \left(\frac{\partial l}{\partial s_1} + 1 \right) + \mathcal{G}_1 \frac{\partial l}{\partial s_2}.$$

Basta poi scrivere le condizioni d'immobilità del punto $(-x+l, z, y)$ rispetto al triedro (M'), tenendo conto di quelle del punto (x, y, z) rispetto al triedro (M), per giungere, come nel suddetto § 26, ai risultati

$$\mathcal{Q}'_1 = 0, \quad \mathcal{Q}'_2 = -\frac{1}{l},$$

prevedibili, ed agli altri

$$-\frac{\mathcal{G}'_1}{\mathcal{G}_1} = -\frac{\mathcal{E}'}{kl} = \frac{\mathcal{G}'_2}{\mathcal{G}_2 \left(\frac{\partial l}{\partial s_1} + 1 \right) + \mathcal{E} \frac{\partial l}{\partial s_2}} = \frac{1}{kl}.$$

Qui si noti che si ha

$$K' = \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 - \mathcal{E}'^2 = -\frac{\mathcal{E}}{kl^2}, \quad (22)$$

e per conseguenza, utilizzando (21),

$$KK' = \frac{1}{l^4} - \frac{\mathcal{G}_1}{kl^4} \frac{\partial l}{\partial s_2},$$

d'onde si deduce che la condizione trovata da Halphen per le sviluppate delle superficie di Weingarten equivale a $\partial l : \partial s_2 = 0$, e questa ci dice che \mathcal{Q}_2 è funzione del solo parametro q_1 . Dunque: *affinchè una superficie sia una falda della sviluppata d'una superficie di Weingarten è necessario che ammetta un sistema di linee geodeticamente parallele, a curvatura geodetica costante.* La condizione non è sufficiente. Infatti noi abbiamo sempre esclusi i sistemi di geodetiche rettilinee, perchè è indispensabile che le tangenti alle geodetiche considerate formino una congruenza, e d'altra parte nel § 14 abbiamo avuto occasione di riconoscere l'esistenza di superficie rigate, le cui generatrici sono attraversate ortogonalmente da linee a curvatura geodetica costante.

24. Ora l'osservazione fatta nel § 8 ci permette di affermare che *ciascuna falda della sviluppata d'una superficie di Weingarten è applicabile sopra una superficie di rotazione.* Da $\mathcal{Q}_2 = -1:l$, data una relazione $R_2 = \varphi(R_1)$, se si osserva che $dq_1 = dR_1$, si trae successivamente

$$\frac{\partial \log Q_2}{\partial q_1} = \frac{1}{R_1 - R_2}, \quad Q_2 = e^{\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}},$$

dimodochè basta porre

$$f(s) = e^{\int \frac{ds}{s - \varphi(s)}}$$

perchè la (9) rappresenti il meridiano d'una superficie di rotazione, sulla quale è applicabile la prima falda della sviluppata della superficie di Weingarten, definita da $R_2 = \varphi(R_1)$. La forma di tali superficie di rotazione dipende, come si vede, unicamente dalla natura del vincolo che intercede fra R_1 ed R_2 . Reciprocamente ogni superficie applicabile sopra una superficie di rotazione è una falda della sviluppata d'una superficie di Weingarten, a meno che non sia costituita dalle binormali d'una linea a torsione costante. Questi teoremi sono dovuti a Weingarten.

25. Torniamo, per finire, alla questione enunciata in principio del § 23. Applicando le formole fondamentali ai coseni $\alpha=0, \beta=1, \gamma=0$, si ottiene

$$\frac{\delta\alpha}{ds} = \frac{\text{sen } \omega}{l}, \quad \frac{\delta\beta}{ds} = 0, \quad \frac{\delta\gamma}{ds} = -\mathcal{E} \cos \omega + \mathcal{N}_2 \text{sen } \omega;$$

e, se si vuole che $M'z'$ generi una sviluppabile, si deve (cfr. IX, form. 19) determinare ω in modo che la condizione

$$\begin{vmatrix} \alpha & \delta\alpha & \delta x \\ \beta & \delta\beta & \delta y \\ \gamma & \delta\gamma & \delta z \end{vmatrix} = 0$$

sia soddisfatta, cioè (a calcoli fatti) che si abbia

$$\mathcal{E}_\omega + (\mathcal{E} \cos \omega - \mathcal{N}_2 \text{sen } \omega) \frac{d\omega}{ds} = 0.$$

Questa è l'eguaglianza che in ogni caso definisce l'inclinazione ω , su Mx , di quelle linee di (M) che corrispondono alle linee di curvatura di (M') . Affinchè siano anch'esse linee di curvatura su (M) bisogna inoltre che ω annulli \mathcal{E}_ω , e però le condizioni

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \cos 2\omega + \frac{1}{2} (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \text{sen } 2\omega &= 0, \\ (\mathcal{E} \cos \omega - \mathcal{N}_2 \text{sen } \omega) \left(\cos \omega \frac{dl}{ds_1} + \text{sen } \omega \frac{dl}{ds_2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

debbono ridursi ad una condizione sola. Dall'identificazione risulta, mettendo in disparte il caso delle superficie sviluppabili,

$$\frac{dl}{ds_1} = 0, \quad \frac{dl}{ds_2} = 0,$$

cioè l deve avere un valore costante a . Possiamo dunque enunciare quest'altro teorema di Ribaucour: perchè alle linee di curvatura d'una falda della sviluppata d'una superficie corrispondano sull'altra falda le linee di curvatura di questa, è necessario e sufficiente che sia costante la distanza dei centri principali di curvatura della superficie considerata. In altri termini questa dev'essere una speciale superficie di Weingarten, definita dalla relazione $R_1 - R_2 = \text{costante}$. In tale ipotesi le formole (21) e (22) danno

$$K = K' = -\frac{1}{a^2},$$

cioè le due falde sono superficie a curvatura costante negativa. Inversamente, data una superficie a curvatura $-\frac{1}{a^2}$, se tangenzialmente ad una semplice infinità di geodetiche, concorrenti in un punto infinitamente lontano, si costruiscono, a partire dai punti di contatto, segmenti rettilinei di lunghezza a , nel verso in cui le geodetiche si dirigono al punto comune, gli estremi di tali segmenti stanno sopra un'altra superficie a curvatura $-\frac{1}{a^2}$, che insieme alla prima costituisce la sviluppata d'una superficie di Weingarten; ed alle linee di curvatura come alle assintotiche della superficie data corrispondono le analoghe linee dell'altra.

XIII. DEFORMAZIONI INFINITESIME DELLE SUPERFICIE.

1. Immaginiamo che i punti d'una superficie (M) si spostino infinitamente poco per andare a costituire un'altra superficie (M'), e proponiamoci di studiare le alterazioni che in tal modo si producono nelle curvature fondamentali di (M). Siano u, v, w le proiezioni dello spostamento MM' su due tangenti ortogonali e sulla normale ad (M), nel punto M. Quando M percorre nel piano tangente un segmento ds , inclinato di ω sull'asse x , le coordinate ($x=u, y=v, z=w$) del punto M' subiscono le variazioni date dalle solite (XI, 9) formole fondamentali

$$\begin{cases} \frac{\delta x}{ds} = (1 + u_1) \cos \omega + u_2 \operatorname{sen} \omega, \\ \frac{\delta y}{ds} = v_1 \cos \omega + (1 + v_2) \operatorname{sen} \omega, \\ \frac{\delta z}{ds} = w_1 \cos \omega + w_2 \operatorname{sen} \omega, \end{cases} \quad (1)$$

dove per brevità si è posto

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1 v - \mathcal{N}_1 w, & u_2 = \frac{\partial u}{\partial s_2} + \mathcal{E} w - \mathcal{G}_2 v, \\ v_1 = \frac{\partial v}{\partial s_1} + \mathcal{E} w - \mathcal{G}_1 u, & v_2 = \frac{\partial v}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2 u - \mathcal{N}_2 w, \\ w_1 = \frac{\partial w}{\partial s_1} + \mathcal{N}_1 u - \mathcal{E} v, & w_2 = \frac{\partial w}{\partial s_2} + \mathcal{N}_2 v - \mathcal{E} u. \end{cases} \quad (2)$$

Quadrando e sommando le (1) si ottiene $ds' = (1 + \Phi) ds$, dove, a prescindere da infinitesimi superiori,

$$\Phi = u_1 \cos^2 \omega + (v_1 + u_2) \cos \omega \operatorname{sen} \omega + v_2 \operatorname{sen}^2 \omega.$$

Evidentemente Φ , che rappresenta la *dilatazione lineare* per unità di lunghezza, si riduce ad u_1 nella direzione Mx , a v_2 nella direzione My . L'elemento superficiale $ds_1 ds_2$ si trasforma dunque in $(1+u_1)(1+v_2)ds_1 ds_2$, e però, se si rappresenta con $(1+\Theta)ds_1 ds_2$ l'area dell'elemento deformato, se cioè Θ è la *dilatazione superficiale* unitaria, si ha, trascurando infinitesimi superiori, $\Theta = u_1 + v_2$, ovvero, in virtù delle (2),

$$\Theta = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) u + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) v - Hw . \quad (3)$$

Questa formola mostra che *solo negli elassoidi* ($H=0$) avviene che lo *spostamento normale non influisce sulla dilatazione*. Quando la superficie è inestendibile la funzione Φ deve ridursi a zero identicamente, vale a dire che dev'essere $u_1=0, v_2=0, v_1+u_2=0$, e conseguentemente anche $\Theta=0$.

2. La formola (3) ci porge il destro di mettere in evidenza un'importante proprietà degli elassoidi. Una linea chiusa, piana, stacca da qualunque superficie curva un'area certamente maggiore di quella che limita nel piano che la contiene; ma, se la linea è storta, un'altra superficie prende il posto del piano per determinare entro il dato contorno un'area minima. Una siffatta superficie si dice appunto *ad area minima* o semplicemente *minima*. Deformandola infinitamente poco, in modo che non cessi di contenere la curva data, è necessario che la variazione prima dell'area limitata dalla curva stessa sia nulla, cioè che si abbia $\iint \Theta ds_1 ds_2 = 0$. Intanto è chiaro *a priori* che gli spostamenti tangenziali non possono far variare l'area chiusa nel contorno fisso, e del resto noi possiamo sempre supporre che da una superficie all'altra si passi mediante spostamenti normali w , arbitrarii. Allora, in virtù di (3), la condizione precedente diventa $\iint Hw ds_1 ds_2 = 0$, ed affinchè sia soddisfatta, qualunque sia w , bisogna che si abbia, in ciascun punto, $H=0$. Dunque *ogni superficie minima è un elassoide*; ma, siccome la predetta condizione non è sufficiente perchè l'area sia minima, è chiaro che, eccezionalmente, un elassoide può non essere ad area minima. Per veder meglio come avviene che gli spostamenti tangenziali non influiscono sulla variazione prima dell'area osserviamo che

$$\iint \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) f ds_1 ds_2 = \iint \frac{\partial Q_1 f}{\partial q_1} dq_1 dq_2 = \int f ds_2 ,$$

intendendo esteso l'ultimo integrale a tutto il contorno. Dunque, poichè u e v sul contorno sono nulli,

$$\iint \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) u ds_1 ds_2 = 0 \quad , \quad \iint \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) v ds_1 ds_2 = 0 .$$

3. I coseni direttori della tangente alla traiettoria di M' hanno evidentemente i valori (1) divisi per $1+\Phi$, ovvero (a prescindere da infinitesimi

superiori) moltiplicati per $1 - \Phi$. Tale moltiplicazione conduce ai risultati

$$\cos \omega - \varphi \operatorname{sen} \omega, \quad \operatorname{sen} \omega + \varphi \cos \omega, \quad w_1 \cos \omega + w_2 \operatorname{sen} \omega,$$

ponendo

$$\varphi = v_1 \cos^2 \omega - (u_1 - v_2) \cos \omega \operatorname{sen} \omega - u_2 \operatorname{sen}^2 \omega,$$

e poichè i primi due equivalgono a $\cos(\omega + \varphi)$ e $\operatorname{sen}(\omega + \varphi)$ si vede chiaramente che φ è l'angolo di cui ruota nel piano tangente la retta considerata. In particolare gli assi ruotano di v_1 e $-u_2$, e però $v_1 + u_2$, coefficiente del termine rettangolo nella forma Φ , rappresenta il mutuo scorrimento angolare degli assi tangenti. Ora, poichè Φ è generalmente riducibile a forma canonica in un modo solo, si può affermare che *una sola coppia ortogonale di tangenti resta ortogonale nella deformazione*, ed essa ruota rigidamente, nel piano tangente, d'un angolo $v_1 - u_2 = \frac{1}{2}(v_1 - u_2)$. Siccome poi $v_1 - u_2$ è invariante ortogonale della forma φ , si vede che, comunque si orientino gli assi tangenti, la *rotazione geodetica* della particella superficiale è sempre espressa dalla metà di $\mathfrak{S} = v_1 - u_2$. Adunque *una coppia ortogonale qualunque di tangenti, dopo avere partecipato alla comune rotazione, misurata da $\frac{1}{2}(v_1 - u_2)$, diventa generalmente obliqua per uno scorrimento $\frac{1}{2}(v_1 + u_2)$, che ciascuna delle due tangenti esegue verso l'altra*. L'espressione di \mathfrak{S} risulta dalle (2) sotto la forma semplicissima

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) v - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) u,$$

che non dipende dagli spostamenti normali.

4. Prima di andare oltre dobbiamo osservare che le sei funzioni $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ non sono arbitrarie. Applicando infatti la nota condizione d'integrabilità

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) \frac{\partial}{\partial s_2} = \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) \frac{\partial}{\partial s_1}$$

alle derivate degli spostamenti, date dalle (2), si trovano le relazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial s_1} - \frac{\partial u_1}{\partial s_2} = \mathcal{G}_1(u_1 - v_2) - \mathcal{G}_2(v_1 + u_2) + \mathcal{E}w_1 + \mathcal{N}w_2 \\ \frac{\partial v_2}{\partial s_1} - \frac{\partial v_1}{\partial s_2} = \mathcal{G}_1(v_1 + u_2) + \mathcal{G}_2(u_1 - v_2) - \mathcal{E}w_2 - \mathcal{N}w_1 \\ \frac{\partial w_2}{\partial s_1} - \frac{\partial w_1}{\partial s_2} = \mathcal{G}_1w_1 - \mathcal{G}_2w_2 - \mathcal{N}w_1u_2 + \mathcal{N}w_2v_1 - \mathcal{E}(u_1 - v_2) \end{cases} \quad (4)$$

Ora si osservi che dalle prime due si ricavano i valori di w_1 e w_2 sotto la forma

$$w_1 = U\mathcal{N}w_2 - V\mathcal{E}, \quad w_2 = V\mathcal{N}w_1 - U\mathcal{E}, \quad (5)$$

ponendo

$$\begin{cases} KU = \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) v_1 - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) v_2 + \mathcal{G}_1 u_2 + \mathcal{G}_2 u_1, \\ KV = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) u_2 - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) u_1 + \mathcal{G}_1 v_2 + \mathcal{G}_2 v_1, \end{cases} \quad (6)$$

cioè, in virtù delle (2) e delle formole di Codazzi,

$$U = u + \left(\frac{\mathcal{N}_2}{K} \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\mathcal{E}}{K} \frac{\partial}{\partial s_2} \right) w, \quad V = v + \left(\frac{\mathcal{N}_1}{K} \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{\mathcal{E}}{K} \frac{\partial}{\partial s_1} \right) w.$$

Se poi i valori (5) si sostituiscono nella terza equazione (4) si riconosce non solo che w_1 e w_2 dipendono dalle altre quattro funzioni, ma che fra queste intercede la relazione differenziale

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) (V \mathcal{N}_2 - U \mathcal{E}) - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) (U \mathcal{N}_1 - V \mathcal{E}) \\ & + \mathcal{N}_1 u_2 - \mathcal{N}_2 v_1 + \mathcal{E} (u_1 - v_2) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

5. Nel caso delle superficie inestendibili, essendo

$$u_1 = v_2 = 0, \quad v_1 = -u_2 = \varphi, \quad \mathfrak{S} = v_1 - u_2 = 2\varphi,$$

le formole (6) danno

$$KU = \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}, \quad KV = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_1};$$

quindi la (7) diventa $D\varphi = 0$, dopo aver posto

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_2 \right) \left(\frac{\mathcal{N}_2}{K} \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\mathcal{E}}{K} \frac{\partial}{\partial s_2} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_1 \right) \left(\frac{\mathcal{N}_1}{K} \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{\mathcal{E}}{K} \frac{\partial}{\partial s_1} \right) + H.$$

Dunque gli angoli φ e \mathfrak{S} soddisfano ad un'equazione differenziale del secondo ordine, che si suole chiamare *equazione caratteristica*. È chiaro che, inversamente, ad ogni soluzione φ dell'equazione caratteristica corrisponde una deformazione possibile, giacchè, soddisfatta la (7), sono soddisfatte anche le condizioni d'integrabilità (4), e però le funzioni u, v, w , definite dalle (2), esistono. In particolare, se α, β, γ sono i coseni che definiscono una direzione invariabile, si verifica facilmente che l'equazione caratteristica è soddisfatta dalla funzione γ , e d'altra parte si può constatare che a questa funzione corrisponde, non una vera deformazione, ma solo un cambiamento di posto dell'intera superficie nello spazio. Infatti ogni moto rigido infinitesimo della superficie si può considerare come risultante da una rotazione ε intorno ad una certa retta $(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta)$ e da una traslazione ε' parallela alla retta stessa, dimodochè gli spostamenti prendono la forma

$$u = \varepsilon \xi + \varepsilon' \alpha, \quad v = \varepsilon \eta + \varepsilon' \beta, \quad w = \varepsilon \zeta + \varepsilon' \gamma;$$

poi le (2) danno

$$u_1 = v_2 = 0, \quad v_1 = -u_2 = \varphi = \varepsilon \gamma, \quad w_1 = -\varepsilon \beta, \quad w_2 = \varepsilon \alpha.$$

Ne segue che per lo studio d'una deformazione propriamente detta sarà sempre lecito trascurare in u, v, w termini che abbiano la forma indicata in ultimo luogo.

6. Assumiamo come nuovi assi, nel piano che tocca in M' la superficie deformata, le rette corrispondenti ai valori $-v_1$ e $1/2\pi + u_2$ di ω . Così, rispetto agli antichi assi, i coseni direttori dei nuovi sono, in virtù delle formole (1),

$$\begin{aligned} \text{per l'asse } x' &: 1 &, & 0 &, & w_1 \\ \text{» » } y' &: 0 &, & 1 &, & w_2 \\ \text{» » } z' &: -w_1 &, & -w_2 &, & 1 \end{aligned}$$

Fra le antiche e le nuove coordinate si hanno dunque le relazioni

$$\begin{cases} x' = x - (u - w_1 z) &, & y' = y - (v - w_2 z) &, & z' = z - (w + w_1 x + w_2 y) \\ x = x' + (u - w_1 z') &, & y = y' + (v - w_2 z') &, & z = z' + (w + w_1 x' + w_2 y') \end{cases} \quad (8)$$

Inoltre i quozienti differenziali relativi agli archi ds' che può percorrere M' si esprimono negli antichi mediante la formola

$$\frac{\partial}{\partial s'} = (1 - \Phi) \left(\cos \omega \frac{\partial}{\partial s_1} + \text{sen } \omega \frac{\partial}{\partial s_2} \right),$$

dalla quale, ponendovi successivamente $-v_1$ e $1/2\pi + u_2$ per ω , si deducono i valori dei quozienti differenziali relativi ai nuovi assi:

$$(1 - u_1) \left(\frac{\partial}{\partial s_1} - v_1 \frac{\partial}{\partial s_2} \right), \quad (1 - v_2) \left(\frac{\partial}{\partial s_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial s_1} \right).$$

Dunque

$$\frac{\partial}{\partial s'_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} - \left(u_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + v_1 \frac{\partial}{\partial s_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial s'_2} = \frac{\partial}{\partial s_2} - \left(u_2 \frac{\partial}{\partial s_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \right). \quad (9)$$

7. Ciò premesso, proponiamoci di calcolare le variazioni subite dalle diverse curvatures per effetto della deformazione. La prima condizione d'immobilità del punto (x', y', z') rispetto alla superficie deformata è

$$\frac{\partial x'}{\partial s'_1} = (\mathcal{C}_1 + D\mathcal{C}_1)z' - (\mathcal{C}_2 + D\mathcal{C}_2)y' - 1,$$

adoperando il segno \mathcal{D} per indicare le variazioni prodotte dalla deformazione, e scrivendo D invece di \mathcal{D} quando nel passare da una superficie all'altra si spostano le linee coordinate. Intanto si ha, applicando le (9) alle (8),

$$\frac{\partial x'}{\partial s'_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} (x - u + w_1 z) - \left(u_1 \frac{\partial x}{\partial s_1} + v_1 \frac{\partial x}{\partial s_2} \right),$$

confondendo pure coordinate nuove ed antiche quando trovansi moltiplicate per infinitesimi. Similmente il secondo membro della formola considerata equivale a

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} - \mathcal{C}_1(w + w_1 x + w_2 y) + \mathcal{C}_2(v - w_2 z) + zD\mathcal{C}_1 - yD\mathcal{C}_2.$$

Dunque, osservando le (2), si vede che $x D\mathcal{O}_1 - y D\mathcal{Q}_1$ dev'essere identicamente uguale a

$$\frac{\partial w_1 x}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_1 w_2 x + \mathcal{O}_1 (w_1 x + w_2 y) - u_1 \left(\frac{\partial x}{\partial s_1} + 1 \right) - v_1 \frac{\partial x}{\partial s_2}.$$

Sviluppando e tenendo conto delle condizioni d'immobilità, relative alla superficie primitiva, si ottengono, mediante identificazione, i valori di $D\mathcal{O}_1$ e $D\mathcal{Q}_1$. Con procedimento analogo si calcolano $D\mathcal{O}_2$ e $D\mathcal{Q}_2$ partendo dalla seconda condizione d'immobilità della seconda terna. Si perviene così ai seguenti risultati:

$$\left\{ \begin{array}{l} D\mathcal{O}_1 = \frac{\partial w_1}{\partial s_1} - \mathcal{O}_1 u_1 + \mathcal{E} v_1 + \mathcal{Q}_1 w_2, \quad D\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1 v_1 - \mathcal{Q}_1 u_1 - \mathcal{E} w_1 - \mathcal{O}_1 w_2, \\ D\mathcal{O}_2 = \frac{\partial w_2}{\partial s_2} - \mathcal{O}_2 v_2 + \mathcal{E} u_2 + \mathcal{Q}_2 w_1, \quad D\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_2 u_2 - \mathcal{Q}_2 v_2 - \mathcal{E} w_2 - \mathcal{O}_2 w_1, \end{array} \right. \quad (10)$$

Si noti che, in virtù delle (4), le formole di destra si possono anche scrivere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} D\mathcal{Q}_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1 \right) u_1 - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2 \right) u_2 - \Theta \mathcal{Q}_1, \\ D\mathcal{Q}_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_2 \right) v_2 - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_1 \right) v_1 - \Theta \mathcal{Q}_2. \end{aligned}$$

Quanto alla torsione geodetica, basta operare analogamente sulla seconda condizione d'immobilità della prima terna, o sulla prima della seconda terna, per ottenere

$$D\mathcal{E} = -\frac{\partial w_2}{\partial s_1} - \mathcal{E} u_1 + \mathcal{O}_1 v_1 + \mathcal{Q}_1 w_1,$$

ed anche

$$D\mathcal{E} = -\frac{\partial w_1}{\partial s_2} - \mathcal{E} v_2 + \mathcal{O}_2 u_2 + \mathcal{Q}_2 w_2.$$

Queste due espressioni si equivalgono in virtù della terza formola (4).

8. Ora siamo in grado di calcolare le variazioni che la deformazione produce nella *curvatura media* e nella *curvatura totale*. Le formole (10) di sinistra danno subito

$$\mathcal{O}H = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_1 \right) w_1 + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_2 \right) w_2 - \mathcal{O}_1 u_1 - \mathcal{O}_2 v_2 + \mathcal{E} (v_1 + u_2), \quad (11)$$

o pure, per sostituzione dei valori (2),

$$\mathcal{O}H = u \frac{\partial H}{\partial s_1} + v \frac{\partial H}{\partial s_2} + (\mathcal{O}_1^2 + \mathcal{O}_2^2 + 2\mathcal{E}^2)w + \Delta^2 w.$$

Applicando a $K = \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 - \mathcal{E}^2$ le stesse (10) e le ultime formole ottenute si giunge facilmente al risultato

$$\begin{aligned} \mathcal{O}K &= -K\Theta + \mathcal{O}_2 \frac{\partial w_1}{\partial s_1} + \mathcal{O}_1 \frac{\partial w_2}{\partial s_2} + \mathcal{E} \left(\frac{\partial w_1}{\partial s_2} + \frac{\partial w_2}{\partial s_1} \right) \\ &\quad + (\mathcal{O}_1 \mathcal{Q}_2 - \mathcal{E} \mathcal{Q}_1) w_1 + (\mathcal{O}_2 \mathcal{Q}_1 - \mathcal{E} \mathcal{Q}_2) w_2, \end{aligned}$$

che si può porre sotto varie forme. Se, per esempio, vi si sostituiscono i valori (5), tenendo presenti le formole di Codazzi, si ottiene

$$\mathfrak{D}K = -K\Theta + \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathfrak{G}_2\right)KU + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathfrak{G}_1\right)KV, \quad (12)$$

e si vede subito (§ 5) che nell'ipotesi dell'inestendibilità è $\mathfrak{D}K=0$, cioè (cfr. XI, 25) *la curvatura d'una superficie inestendibile resta invariata in ciascun punto quando la superficie si flette*. Se invece in (11) si sostituiscono a w_1 e w_2 i valori dati dalle (2), si trova la formola

$$\mathfrak{D} \log K = \left(U \frac{\partial}{\partial s_1} + V \frac{\partial}{\partial s_2}\right) \log K + \mathfrak{D}w,$$

dalla quale risulta, per esempio, che se si vuole deformare una superficie a curvatura costante, in modo che la curvatura rimanga invariata, bisogna dare ad ogni punto uno spostamento normale infinitesimo, soddisfacente all'equazione caratteristica.

9. Fra le infinite deformazioni possibili è naturale che l'attenzione si fermi su quelle, per le quali la conica rappresentativa della forma Φ si riduce ad un circolo. Allora accade altrettanto per φ , e si ha, indipendentemente da ω ,

$$u_1 = v_2 = \Phi = \frac{1}{2}\Theta, \quad v_1 = -u_2 = \varphi = \frac{1}{2}\mathfrak{S}.$$

Quindi le (6) danno

$$-KU = \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}, \quad -KV = \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1},$$

e la (12) si riduce alla forma semplicissima

$$\mathfrak{D}K = -(K + \frac{1}{2}\Delta^2)\Theta, \quad (13)$$

indipendente dalla rotazione. Fra dilatazione e rotazione si ha poi la relazione differenziale (7), che qui assume la forma notevole

$$\mathfrak{d}\Theta + \mathfrak{D}\mathfrak{S} = 0, \quad (14)$$

ponendo, per brevità,

$$\mathfrak{d} = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathfrak{G}_2\right) \left(\frac{\mathfrak{G}_2}{K} \frac{\partial}{\partial s_2} - \frac{\mathfrak{G}}{K} \frac{\partial}{\partial s_1}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathfrak{G}_1\right) \left(\frac{\mathfrak{G}_1}{K} \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{\mathfrak{G}}{K} \frac{\partial}{\partial s_2}\right).$$

Per le superficie inestendibili la (14) si riduce, come si è visto nel § 5, all'equazione caratteristica; ma questa regge tuttavia per quei valori di Θ che soddisfano all'equazione $\mathfrak{d}=0$, ed in particolare sussiste quando Θ ha un valore costante, che misurerà, in virtù di (13), il decrescimento unitario della curvatura totale. Qualunque sia, del resto, la funzione Θ soddisfacente all'equazione $\mathfrak{d}=0$, ad essa corrisponde sempre una deformazione possibile, caratterizzata dall'assenza di rotazione geodetica, cioè tale che si ha $\mathfrak{S}=0$,

e conseguentemente

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial s_1}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial s_2}, \quad \Delta^2 \psi = \Theta + Hw, \quad \text{ecc.}$$

10. Tornando al caso generale proponiamoci di determinare le alterazioni prodotte dalla deformazione nelle curvatures delle varie linee. Quando M si sposta in una direzione definita, nel piano tangente ad (M) , dall'angolo ω , M' percorre una curva inclinata di $\omega' = \omega + \varphi$ sull'asse x' , come se per effetto della deformazione si avesse $D\omega = \varphi$. Dunque, ricordando (XI, 10, 18) che

$$\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N}_1 \cos^2 \omega - 2\mathcal{T} \cos \omega \sin \omega + \mathcal{N}_2 \sin^2 \omega, \quad \frac{\partial \mathcal{N}_\omega}{\partial \omega} = -2\mathcal{T}_\omega,$$

si ottiene

$$\mathcal{D}\mathcal{N}_\omega = \cos^2 \omega \cdot D\mathcal{N}_1 - 2\cos \omega \sin \omega \cdot D\mathcal{T} + \sin^2 \omega \cdot D\mathcal{N}_2 - 2\varphi \mathcal{T}_\omega,$$

ed in particolare

$$\mathcal{D}\mathcal{N}_1 = \frac{\partial w_1}{\partial s_1} - \mathcal{N}_1 u_1 - \mathcal{T} v_1 + \mathcal{G}_1 w_1, \quad \mathcal{D}\mathcal{N}_2 = \frac{\partial w_2}{\partial s_2} - \mathcal{N}_2 v_2 - \mathcal{T} u_2 + \mathcal{G}_2 w_2.$$

Similmente dalle formole

$$\mathcal{T}_\omega = \mathcal{T} \cos 2\omega + \frac{1}{2} (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \sin 2\omega, \quad \frac{\partial \mathcal{T}_\omega}{\partial \omega} = \mathcal{N}_\omega - \mathcal{N}_{\omega + \frac{\pi}{2}}$$

si deduce

$$\mathcal{D}\mathcal{T}_\omega = \cos 2\omega \cdot D\mathcal{T} + \frac{1}{2} \sin 2\omega \cdot (D\mathcal{N}_1 - D\mathcal{N}_2) + (\mathcal{N}_\omega - \mathcal{N}_{\omega + \frac{\pi}{2}}) \varphi.$$

In particolare l'alterazione prodotta nella torsione geodetica delle linee q_1 è data dalla formola

$$\mathcal{D}\mathcal{T} = -\frac{\partial w_2}{\partial s_1} - \mathcal{T} u_1 + \mathcal{N}_1 v_1 + \mathcal{G}_1 w_1,$$

ed è facile verificare che, quando gli spostamenti hanno la forma indicata in fine del § 5, tanto $\mathcal{D}\mathcal{T}$ quanto le $\mathcal{D}\mathcal{N}$ sono nulle. Inversamente, se la superficie è inestendibile, la detta forma segue dalle ipotesi $\mathcal{D}\mathcal{N}_1 = 0$, $\mathcal{D}\mathcal{N}_2 = 0$, $\mathcal{D}\mathcal{T} = 0$. Da queste, infatti, e dalle (4) si deduce

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_2}{\partial s_1} = \mathcal{N}_1 \varphi + \mathcal{G}_1 w_1, \quad \frac{\partial w_2}{\partial s_2} = -\mathcal{G}_2 w_1 - \mathcal{T} \varphi, \\ \frac{\partial w_1}{\partial s_1} = -\mathcal{G}_1 w_2 + \mathcal{T} \varphi, \quad \frac{\partial w_1}{\partial s_2} = -\mathcal{N}_2 \varphi + \mathcal{G}_2 w_2, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = -\mathcal{T}_2 w_1 - \mathcal{N}_1 w_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = \mathcal{T} w_2 + \mathcal{N}_2 w_1; \end{array} \right. \quad (15)$$

poi

$$\frac{\partial}{\partial s_1} (w_2^2 + w_1^2 + \varphi^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} (w_2^2 + w_1^2 + \varphi^2) = 0.$$

Dunque $w_2^2 + w_1^2 + \varphi^2$ ha un valore costante ε^2 . Ora, posto $w_2 = \varepsilon \alpha$, $w_1 = -\varepsilon \beta$, $\varphi = \varepsilon \gamma$, le relazioni (15) sono appunto quelle che esprimono l'invariabilità della direzione (α, β, γ) .

11. Finalmente, per sapere di quanto varia la curvatura geodetica d'una linea qualunque, osserviamo che la formola

$$\mathcal{G}_\omega + \frac{\partial \omega}{\partial s} = \mathcal{G}_1 \cos \omega - \mathcal{G}_2 \sin \omega$$

diventa

$$\mathcal{G}_\omega + \Theta \mathcal{G}_\omega + (1 - \Phi) \frac{\partial}{\partial s} (\omega + \varphi) = (\mathcal{G}_1 + D \mathcal{G}_1) \cos (\omega + \varphi) - (\mathcal{G}_2 + D \mathcal{G}_2) \sin (\omega + \varphi)$$

sulla superficie (M'). Ne segue

$$\Theta \mathcal{G}_\omega = \Phi \frac{\partial \omega}{\partial s} + \left[D \mathcal{G}_1 - \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1 \right) \varphi \right] \cos \omega - \left[D \mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2 \right) \varphi \right] \sin \omega ;$$

poi, tornando a distinguere con un accento la differenziazione relativa alla direzione $\omega + \frac{1}{2}\pi$, si giunge alla formola

$$\Theta \mathcal{G}_\omega = \left(\frac{\partial}{\partial s'} + \mathcal{G}'_\omega \right) \Phi - \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathcal{G}'_\omega \right) (2\varphi - \vartheta) - \Theta \mathcal{G}_\omega$$

dopo un calcolo facile, che per brevità omettiamo. Il secondo membro si riduce manifestamente a zero se la superficie è inestendibile, e si ritrova così il fatto, del resto evidente, dell'*invariabilità della curvatura geodetica* delle linee tracciate sopra una superficie flessibile ed inestendibile.

XIV. LE CONGRUENZE.

1. La Geometria intrinseca dei sistemi di rette si può fondare su considerazioni analoghe a quelle che nei precedenti capitoli ci hanno permesso d'intraprendere lo studio infinitesimale dei sistemi di punti. In una congruenza, o sistema doppiamente infinito di rette, si considerino due di queste, g e g' , infinitamente vicine. Si prenda g come asse s , e l'asse x incontri ortogonalmente anche g' . Siano $d\sigma$ e $pd\sigma$ l'angolo e la distanza delle rette considerate, dimodochè p rappresenti (*cf.* IX, 7, c; 8) il *parametro distributore* dei piani tangenti all'elemento gg' di superficie rigata. Quando gli assi si recano nella posizione individuata da un altro elemento superficiale $g'g''$, le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ subite, rispetto alla posizione iniziale, dalle coordinate x, y, z d'un punto, sono uguali alle possibili variazioni dx, dy, dz relative agli assi mobili, aumentate delle variazioni dovute unicamente al moto del triedro di riferimento, cioè alla traslazione ($pd\sigma, 0, hd\sigma$) ed alla rotazione ($d\sigma, 0, kd\sigma$). Si hanno dunque le formole

$$\frac{\delta x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} - ky + p \quad , \quad \frac{\delta y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \sigma} + kx - z \quad , \quad \frac{\delta z}{\partial \sigma} = \frac{\partial z}{\partial \sigma} + y + h \quad ,$$

vere anche nel caso che x, y, z siano coseni direttori, purchè allora si trascurino p ed h , caratteristiche della traslazione. Quando il piano y gira intorno a g , l'origine (*punto centrale*) si sposta lungo la generatrice. Immaginandola trasportata in un punto invariabile di g , alla distanza q dal punto centrale, le formole precedenti diventano

$$\frac{\delta x}{\delta \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} - ky + p, \quad \frac{\delta y}{\delta \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \sigma} + kx - z + q, \quad \frac{\delta z}{\delta \sigma} = \frac{\partial z}{\partial \sigma} + y + r, \quad (1)$$

dove per brevità si è posto

$$r = h - \frac{dq}{d\sigma}. \quad (2)$$

Ciò premesso, distinguiamo con indici 1 le quantità relative ad una data posizione (del resto arbitraria) del piano y , intendendo che quelle prive dell'indice si riferiscano alla posizione occupata dal piano stesso dopo una rotazione ω , dimodochè

$$x = x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega, \quad y = -x_1 \sin \omega + y_1 \cos \omega, \quad z = z_1.$$

Se invece si distingue con indici 2 tutto ciò che si riferisce alla posizione $\omega = \frac{1}{2}\pi$, si vede che $x_2 = y_1, y_2 = -x_1, z_2 = z_1$, e però le formole (1), per una posizione del piano y , perpendicolare alla primitiva, diventano

$$\frac{\delta x}{\delta \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} - k'y + z - q', \quad \frac{\delta y}{\delta \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \sigma} + k'x + p', \quad \frac{\delta z}{\delta \sigma} = \frac{\partial z}{\partial \sigma} - x + r'. \quad (1')$$

Dunque, se il piano y si fissa nella posizione iniziale ($\omega = 0$), le condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (x, y, z) risultano da (1) ed (1') sotto la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \sigma_1} = k_1 y - p_1, \quad \frac{\partial y}{\partial \sigma_1} = z - k_1 x - q_1, \quad \frac{\partial z}{\partial \sigma_1} = -y - r_1, \\ \frac{\partial x}{\partial \sigma_2} = -z + k_2 y + q_2, \quad \frac{\partial y}{\partial \sigma_2} = -k_2 x - p_2, \quad \frac{\partial z}{\partial \sigma_2} = x - r_2. \end{array} \right. \quad (3)$$

Son queste le formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle congruenze.

2. I quozienti differenziali $\frac{\partial}{\partial \sigma}$, relativi ad un angolo ω qualunque, si compongono assai semplicemente mediante i quozienti $\frac{\partial}{\partial \sigma_1}$ e $\frac{\partial}{\partial \sigma_2}$. Basta infatti osservare che i coseni direttori di g' , uguali manifestamente a

$$\sin \omega d\sigma, \quad -\cos \omega d\sigma, \quad 1,$$

risultano, dalle formole (3), uguali a $d\sigma_2, -d\sigma_1, 1$. Dunque

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \cos \omega \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \sin \omega \frac{\partial}{\partial \sigma_2}. \quad (4)$$

Ciò premesso, la prima delle (1) mostra che $-p$ è il valore, su g , del quo-

ziente differenziale di x rispetto a σ , e qui per x si deve intendere $x \cos \omega + y \sin \omega$, di guisa che si ha, tenendo presenti le formole (3) e (4),

$$p = (p_1 \cos \omega - q_2 \sin \omega) \cos \omega + (q_1 \cos \omega + p_2 \sin \omega) \sin \omega ,$$

cioè

$$p = p_1 \cos^2 \omega + (q_1 - q_2) \cos \omega \sin \omega + p_2 \sin^2 \omega . \quad (5)$$

Operando analogamente sulla seconda formola (1) si ottiene

$$q = q_1 \cos^2 \omega - (p_1 - p_2) \cos \omega \sin \omega + q_2 \sin^2 \omega . \quad (6)$$

In queste due relazioni (*formole di Hamilton*) si compendiano le proprietà fondamentali delle congruenze. Per esse si perviene, mercè l'eliminazione di ω , alla conoscenza del semplicissimo legame esistente fra p e q :

$$(p - p_1)(p - p_2) + (q - q_1)(q - q_2) = 0 .$$

3. Quando ad ω si aggiunge $\frac{1}{2}\pi$ si trovano valori p' e q' di p e q , tali che

$$p + p' = p_1 + p_2 , \quad q + q' = q_1 + q_2 .$$

La prima eguaglianza conduce (*cf.* XI, 23) alla nozione del *medio parametro distributore* $p_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ della congruenza intorno a g ; la seconda mostra che su g esiste, alla distanza $q_0 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ dall'origine, un punto (*punto medio*) rispetto al quale sono simmetrici i punti centrali relativi a due piani ortogonali qualunque. Dalle medesime formole (5) e (6) si deduce anche

$$p - p' = (p_1 - p_2) \cos 2\omega + (q_1 - q_2) \sin 2\omega , \quad q - q' = (q_1 - q_2) \cos 2\omega - (p_1 - p_2) \sin 2\omega ,$$

e però, posto

$$p_1 - p_2 = 2l \cos 2\omega_0 , \quad q_1 - q_2 = 2l \sin 2\omega_0 ,$$

si vede che si ha, più generalmente,

$$p - p' = 2l \cos 2(\omega_0 - \omega) , \quad q - q' = 2l \sin 2(\omega_0 - \omega) . \quad (7)$$

Un altro invariante è dunque

$$4l^2 = (p - p')^2 + (q - q')^2 = (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 ;$$

ma ad esso possiamo sostituire

$$\kappa = pp' + qq' = p_1 p_2 + q_1 q_2 ,$$

giacchè $\kappa = p_0^2 + q_0^2 - l^2$. I tre invarianti ortogonali testè menzionati si compongono poi nei discriminanti $\kappa - p_0^2$ e $\kappa - q_0^2$ delle forme (5) e (6).

4. La discussione delle (7) conduce a distinguere, fra le infinite coppie di piani ortogonali passanti per g , quelle che corrispondono ai valori ω_0 ed $\omega_0 + \frac{1}{4}\pi$ di ω . Per la prima i punti centrali coincidono nel punto medio, ed i parametri distributori raggiungono i valori estremi $p_0 \pm l$. Per la seconda, costituita dai *piani principali*, si ha $p = p'$, ed i punti centrali diventano i

punti limiti, cioè stanno alle estremità del segmento, di lunghezza $2l$, che raccoglie tutti i punti centrali. Quando la figura si riferisce, per esempio, alla prima coppia, la formola (5) dà $p = p_0 - l \cos 2\omega$, e nelle due direzioni, reali o immaginarie, definite da $\cos 2\omega = p_0 : l$, si ha $p = 0$, cioè g' incontra g . I piani corrispondenti a queste direzioni sono i *piani focali*, ed i relativi punti centrali (*fuochi*), simmetrici anch'essi rispetto al punto medio, distano da questo per $\sqrt{l^2 - p_0^2}$. Tali circostanze emergono più chiaramente ancora dall'interpretazione geometrica della relazione trovata fra p e q , la quale si può considerare come l'equazione d'un circolo di raggio l , di centro (p_0, q_0) e di potenza \times rispetto all'origine. Le proprietà precedenti noi le abbiamo già incontrate, per $p_0 = 0$, nelle congruenze costituite dalle normali ad una superficie qualunque, e più oltre si vedrà che solo in tali congruenze, che si chiamano *congruenze normali*, può accadere che il medio parametro distributore sia nullo. Per esse avviene che i fuochi cadono nei punti limiti, e la *superficie principale*, luogo di tutti i punti limiti, diventa la sviluppata della superficie che si considera.

5. Ora torniamo alle (3) per applicar loro la condizione d'integrabilità, che ha sempre la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1} = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_2} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \sigma_1}, \quad (8)$$

purchè si determinino convenientemente le λ . Per l'esistenza di z occorre e basta che si abbia

$$(\lambda_2 - k_2)x + (\lambda_1 + k_1)y - (p_1 + p_2) = \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \lambda_2\right)r_2 - \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_2} + \lambda_1\right)r_1, \quad (9)$$

qualunque siano x ed y . Dunque $\lambda_1 = -k_1$, $\lambda_2 = k_2$, e la condizione (8) diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1} = k_1 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + k_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_2}, \quad (10)$$

mentre la relazione (9) si riduce a

$$\frac{\partial r_1}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_1} - (p_1 + p_2) = k_1 r_1 + k_2 r_2. \quad (11)$$

Similmente, se si applica la condizione (10) alle funzioni x ed y , sulla generatrice, si ottiene

$$\frac{\partial p_1}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial q_2}{\partial \sigma_1} + r_1 = k_1(p_1 - p_2) + k_2(q_1 - q_2), \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \sigma_1} + r_2 = k_1(q_1 - q_2) - k_2(p_1 - p_2), \quad (13)$$

ed è facile assicurarsi mediante l'eguaglianza (2) che queste formole non sono vincolate alla scelta dell'origine. Considerando poi i coefficienti di x o

di y , rispettivamente, nella condizione (10) applicata ad y o ad x , si trova

$$\frac{\partial k_1}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial k_2}{\partial \sigma_1} = 1 + k_1^2 + k_2^2. \quad (3)$$

Le ultime quattro relazioni sono, per così dire, le *formole di Codazzi* nella teoria delle congruenze, e debbono effettivamente ridursi alle tre note formole (XI, 9) di Codazzi quando la congruenza è costituita dalle normali ad una superficie. Del resto, se si esegue la *rappresentazione sferica* della congruenza, se cioè (*cf.* XI, 15) si considerano i raggi paralleli alle rette della congruenza in una sfera di raggio 1, è facile vedere, sia scrivendo la condizione d'integrabilità e paragonandola alla (10), sia trasformando le (3) nelle condizioni d'immobilità relative alla superficie sferica (ed osservando che $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = 1$, $\mathcal{C} = 0$), che $\mathcal{G}_1 = k_2$, $\mathcal{G}_2 = k_1$. Interpretate così le k , se inoltre si osserva che

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = -\frac{\partial}{\partial s_2}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{\partial}{\partial \sigma_1},$$

si vede subito che la (3) è appunto la formola di Gauss relativa alla sfera, mentre le altre due formole di Codazzi sono identicamente soddisfatte.

6. Per dare evidenza maggiore all'accennata riduzione, che qui vogliamo eseguire, noi ora sostituiamo ai quozienti differenziali $\frac{\partial}{\partial \sigma}$ altri quozienti, determinati dalle relazioni

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_1} = p_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial s_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_2} = -q_2 \frac{\partial}{\partial s_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial s_2},$$

ed alle k altre quantità, definite nel seguente modo:

$$k_1 = -p_1 \mathcal{G}_1 + q_1 \mathcal{G}_2, \quad k_2 = q_2 \mathcal{G}_1 + p_2 \mathcal{G}_2.$$

La trasformazione delle formole (1) e (2) non presenta difficoltà. Combinando convenientemente le relazioni trasformate si giunge alle formole

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{q_2}{x} - \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{p_2}{x} + \frac{1}{x} [(p_1 - p_2) \mathcal{G}_1 - (q_1 - q_2) \mathcal{G}_2] + \frac{1}{x^2} (p_2 r_1 + q_2 r_2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{q_1}{x} + \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{p_1}{x} + \frac{1}{x} [(q_1 - q_2) \mathcal{G}_1 + (p_1 - p_2) \mathcal{G}_2] + \frac{1}{x^2} (p_1 r_2 - q_1 r_1) &= 0; \end{aligned}$$

poi la (3), quando si tengano presenti (1) e (2), si trasforma facilmente in

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1^2 + \mathcal{G}_2^2 = \frac{1}{x} (\mathcal{G}_1 r_1 - \mathcal{G}_2 r_2 - 1).$$

Ciò premesso, se si pone

$$p_1 = -x \mathcal{C}_2, \quad p_2 = -x \mathcal{C}_1, \quad q_1 = x \mathcal{N}_1, \quad q_2 = x \mathcal{N}_2,$$

osservando che

$$\frac{1}{x} = \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 + \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2,$$

le precedenti relazioni acquistano la forma definitiva :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{O}_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial s_2} + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \mathcal{G}_1 - (\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2) \mathcal{G}_2 \\ &= (\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 + \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2) (\mathcal{E}_1 r_1 - \mathcal{O}_2 r_2) , \\ \frac{\partial \mathcal{O}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial s_1} + (\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2) \mathcal{G}_1 + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \mathcal{G}_2 & \quad (11) \\ &= (\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 + \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2) (\mathcal{E}_2 r_2 + \mathcal{O}_1 r_1) , \\ \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1^2 + \mathcal{G}_2^2 &= (\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 + \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2) (\mathcal{G}_1 r_1 - \mathcal{G}_2 r_2 - 1) . \end{aligned} \right.$$

Introducendo poi la nuova segnatura anche nelle formole (3), queste diventano

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s_1} = \mathcal{O}_1 z - \mathcal{G}_1 y - 1 & \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} = \mathcal{G}_2 y + \mathcal{E}_2 z , \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} = \mathcal{G}_1 x - \mathcal{E}_1 z & \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial s_2} = \mathcal{O}_2 z - \mathcal{G}_2 x - 1 , \quad (12) \\ \frac{\partial z}{\partial s_1} = \mathcal{E}_1 (y + r_1) - \mathcal{O}_1 (x - r_2) , & \quad \frac{\partial z}{\partial s_2} = -\mathcal{E}_2 (x - r_2) + \mathcal{O}_2 (y + r_1) , \end{aligned} \right.$$

e possono servire a riconoscere il significato geometrico delle nuove variabili.

7. Come si caratterizzano le congruenze normali? Affinchè le rette d'una congruenza siano tutte normali ad una superficie è necessario e sufficiente che per un punto (almeno) della generatrice ($x=0, y=0$) si abbia $\delta s=0$, cioè, ricordando la (4),

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \sigma_1} + r_1 \right) \cos \omega + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma_2} + r_2 \right) \sin \omega = 0 ,$$

qualunque sia ω . È dunque necessaria e sufficiente l'esistenza d'una funzione z che ammetta per quozienti differenziali $-r_1$ e $-r_2$, per la qual cosa occorre, in virtù della (10), e basta che si abbia

$$\frac{\partial r_1}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_1} = k_1 r_1 + k_2 r_2 ,$$

cioè, per la (O), che sia nullo il medio parametro distributore, o, ciò che vale lo stesso, che i piani focali siano perpendicolari, o pure che i fuochi cadano nei punti limiti. Ciò permette di prendere $\mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$, e così le formole (12), quando inoltre si scelga l'origine sulla superficie, diventano le note formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle superficie, mentre le (11) si riducono finalmente alle formole di Codazzi.

8. Terminiamo con una sola applicazione delle formole (3) alla determinazione delle superficie involupate dai piani perpendicolari alle rette della congruenza. Derivando l'equazione $s=0$ si ottengono subito, mediante le

(3), le coordinate $x=r_2$, $y=-r_1$ del punto di contatto del piano s col proprio involuppo; poi le medesime formole, applicate a questo punto, fanno conoscere, per ogni ω , la direzione d'una tangente, definita nel piano s da coseni α e β proporzionali a

$$P_1 \cos \omega - Q_2 \sin \omega, \quad Q_1 \cos \omega + P_2 \sin \omega,$$

ponendo per brevità

$$P_1 = p_1 + k_1 r_1 + \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_1}, \quad P_2 = p_2 + k_2 r_2 - \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_2},$$

$$Q_1 = q_1 + k_1 r_2 - \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_1}, \quad Q_2 = q_2 - k_2 r_1 - \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_2}.$$

Bisogna poi notare che, in virtù della (O), si può prendere $P_1 = -P_2 = P$. Ciò premesso, sia

$$\alpha = \lambda(P \cos \omega - Q_2 \sin \omega), \quad \beta = \lambda(Q_1 \cos \omega + P \sin \omega),$$

e conseguentemente

$$\lambda \cos \omega = \frac{Q_1 \beta - P \alpha}{Q_1 Q_2 - P^2}, \quad \lambda \sin \omega = \frac{P \beta - Q_1 \alpha}{Q_1 Q_2 - P^2}.$$

La curvatura della sezione normale determinata dall'angolo ω è $\lambda \delta \gamma : d\sigma$, e però si esprime, in virtù delle (3), nel seguente modo:

$$\mathcal{N}\mathcal{C} = \lambda(\beta \cos \omega - \alpha \sin \omega) = \frac{Q_1 \alpha^2 - 2P\alpha\beta + Q_2 \beta^2}{Q_1 Q_2 - P^2}.$$

Quindi, adoperando la solita segnatura,

$$\mathcal{N}\mathcal{C}_1 = \frac{Q_1}{Q_1 Q_2 - P^2}, \quad \mathcal{N}\mathcal{C}_2 = \frac{Q_2}{Q_1 Q_2 - P^2}, \quad \mathcal{C} = \frac{P}{Q_1 Q_2 - P^2}.$$

La *curvatura totale* ($\mathcal{N}\mathcal{C}_1 \mathcal{N}\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}^2$) è dunque inversa di $Q_1 Q_2 - P^2$, ed il rapporto della *curvatura media* alla curvatura totale è la metà di $Q_1 + Q_2$, cioè di

$$2q_0 - \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_1} + k_2\right)r_1 - \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_2} - k_1\right)r_2. \quad (13)$$

Notevole è il caso delle *congruenze isotrope*, per le quali p è costante su ciascuna generatrice. Allora, in virtù di (5), anche q ha un valore costante in ciascun punto di g , e le formole (1) e (2) danno

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial q}{\partial \sigma_1} = -r_1, \quad \frac{\partial p}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial q}{\partial \sigma_2} = r_2.$$

Quindi, se si tien presente la (10), l'espressione (13) si cambia nel primo membro dell'equazione

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_1} + k_2\right) \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_2} - k_1\right) \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + 2 \right] q = 0$$

la quale caratterizza dunque le involupate a curvatura media nulla. D'altra

parte, se i precedenti valori di r_1 ed r_2 si portano nella (O), questa diventa

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_1} + k_2 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_2} - k_1 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + 2 \right] p = 0 .$$

Dunque si ottengono infiniti elassoidi prendendo q proporzionale a p , ed in particolare, per $q=0$, si perviene al seguente teorema di Ribaucour: *la involupata media d'una congruenza isotropa è un elassoide.*

XV. GLI SPAZII A TRE DIMENSIONI.

1. Consideriamo una funzione continua dei punti d'uno spazio a tre dimensioni, cioè una variabile u che prenda un valore prescritto in ciascun posto M d'un sistema triplamente infinito di punti, e varii infinitamente poco quando M passa ad occupare una posizione infinitamente prossima M' . Imporre ad u un valore costante equivale a staccare dalla tripla infinità di punti un'infinità doppia, cioè una superficie; e cambiare il valore stesso significa passare da una superficie ad un'altra. È dunque chiaro che in ogni funzione reale dei punti d'uno spazio sta la rappresentazione analitica d'un sistema semplicemente infinito di superficie. Il rapporto ad MM' della variazione che la funzione subisce quando il punto va da M ad M' è il *quoziente differenziale* relativo alla direzione MM' ; ed è facile (cfr. VIII, 2) vedere che, noti i quozienti differenziali in tre direzioni, perpendicolari fra loro due a due, il quoziente relativo alla direzione definita dai coseni α, β, γ risulta dall'operazione

$$\frac{d}{ds} = \alpha \frac{\partial}{\partial s_1} + \beta \frac{\partial}{\partial s_2} + \gamma \frac{\partial}{\partial s_3} ;$$

e però, se si pone

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial s_3} \right)^2 ,$$

si ha

$$\frac{du}{ds} = \sqrt{\Delta u} \cdot \cos \theta ,$$

chiamando θ l'angolo che la direzione variabile considerata fa con la direzione fissa, definita dai coseni

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_1} , \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_2} , \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_3} . \quad (1)$$

Questa è dunque sempre la direzione secondo la quale u tende a variare più

rapidamente, ed il valore del quoziente differenziale in tale direzione è appunto $\sqrt{\Delta u}$. Invece, se si fa $\theta = 0$, si vede che u *tende a rimanere costante* lungo le infinite perpendicolari condotte per M alla direzione (1). In altri termini per ogni punto M passa un piano, caratterizzato dalla proprietà che la variazione di u , quando M si sposta infinitamente poco in esso, sono infinitesime d' un ordine superiore al primo rispetto alla grandezza dello spostamento di M. D'altra parte, se M percorre una linea qualunque della superficie appartenente al sistema definito dalla funzione u , questa rimane costante, e tale deve rimanere anche, a prescindere da infinitesimi superiori, quando M si sposta invece, infinitamente poco, lungo la tangente alla linea stessa, giacchè, trascurate le quantità che sono infinitesime d' un ordine superiore rispetto all' arco percorso, la linea si può confondere con la sua tangente. Dunque la tangente alla linea appartiene necessariamente al piano precedentemente trovato, vale a dire che *le tangenti a tutte le linee che passano per M sulla superficie stanno in un piano*, purchè non siano tutti nulli i quozienti differenziali (1). Ed ora possiamo aggiungere che i coseni (1) sono appunto quelli che definiscono la direzione della *normale* alla superficie nel punto M.

2. Su tre famiglie di superficie, definite dalle funzioni q_1, q_2, q_3 , si può fondare un sistema di coordinate curvilinee, seguendo le cose dette nel § 7 dell'ottavo capitolo. Allora per ogni punto M dello spazio passa una *superficie* q_i , luogo dei punti nei quali il parametro q_i conserva il valore che ha in M. Le superficie q_1, q_2, q_3 , che passano per M, si tagliano secondo tre linee (*linee coordinate*); e si chiama *linea* q_i quella lungo la quale varia il solo parametro q_i . Noi supporremo sempre che in ogni punto le superficie (e per conseguenza le linee) coordinate siano due a due perpendicolari fra loro, ed assumeremo come assi le tangenti Mx_1, Mx_2, Mx_3 alle linee stesse. Ora, rappresentate con x_1, x_2, x_3 le coordinate d' un punto fisso dello spazio, vogliamo scrivere le condizioni d'immobilità rispetto al detto triedro, considerato successivamente come triedro fondamentale delle tre superficie coordinate. Prima supponiamo definite le funzioni Q, che intervengono nell'espressione del quadrato dell' arco elementare

$$ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2, \quad (2)$$

e poniamo

$$\mathcal{G}_{ij} = \frac{1}{Q_i Q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}; \quad (3)$$

indichiamo poi con ijk una disposizione pari degli indici 123, e consideriamo una delle tre superficie, per esempio q_k . Su questa le linee q_i e q_j sono q_i e q_j , e le curvature indicate con \mathcal{G}_i e \mathcal{G}_j nella teoria delle superficie (XI, 6) sono \mathcal{G}_{ij} e \mathcal{G}_{ji} . Rappresentiamo ancora con $\mathcal{C}_{ik}, \mathcal{C}_{jk}$ e \mathcal{C}_k le quantità $\mathcal{C}_{e_1}, \mathcal{C}_{e_2}$ e \mathcal{C} , relative alla superficie considerata, e scriviamo le condi-

zioni d'immobilità (XI, 9) del punto ($x = x_i, y = x_j, z = x_k$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial s_i} &= \mathcal{O}_{ik} x_k - \mathcal{G}_{ij} x_j - 1, & \frac{\partial x_j}{\partial s_i} &= \mathcal{G}_{ij} x_i - \mathcal{E}_k x_k, & \frac{\partial x_k}{\partial s_i} &= \mathcal{E}_k x_j - \mathcal{O}_{ik} x_i, \\ \frac{\partial x_i}{\partial s_j} &= \mathcal{G}_{ji} x_j - \mathcal{E}_k x_k, & \frac{\partial x_j}{\partial s_j} &= \mathcal{O}_{jk} x_k - \mathcal{G}_{ji} x_i - 1, & \frac{\partial x_k}{\partial s_j} &= \mathcal{E}_k x_i - \mathcal{O}_{jk} x_j. \end{aligned}$$

Ciò premesso, se scriviamo la prima coppia di formole per la superficie q_j , e la seconda per q_i , lasciando intatta la terza, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial s_i} &= \mathcal{G}_{ik} x_i - \mathcal{E}_j x_j = \mathcal{E}_k x_j - \mathcal{O}_{ik} x_i, \\ \frac{\partial x_k}{\partial s_j} &= \mathcal{G}_{jk} x_j - \mathcal{E}_i x_i = \mathcal{E}_k x_i - \mathcal{O}_{jk} x_j, \\ \frac{\partial x_k}{\partial s_k} &= \mathcal{O}_{kj} x_j - \mathcal{G}_{ki} x_i - 1 = \mathcal{O}_{ki} x_i - \mathcal{G}_{kj} x_j - 1; \end{aligned}$$

quindi $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_j = -\mathcal{E}_k$ qualunque siano i, j, k , e per conseguenza

$$\mathcal{E}_1 = 0, \quad \mathcal{E}_2 = 0, \quad \mathcal{E}_3 = 0. \quad (4)$$

Inoltre, per qualunque coppia di valori di i e j ,

$$\mathcal{O}_{ij} = -\mathcal{G}_{ij}. \quad (5)$$

Le (4) ci dicono immediatamente che, in ogni sistema triplo ortogonale, qualunque superficie è tagliata dalle superficie delle altre famiglie secondo le linee di curvatura. È questo un importante teorema di Dupin. Quanto alle (5), esse esprimono un fatto evidente, cioè l'eguaglianza, a prescindere dal segno, fra la curvatura normale della linea q_i , considerata come appartenente alla superficie q_j , e la curvatura geodetica della medesima linea sulla superficie q_k . Ne segue che le sei funzioni \mathcal{G} , le sole che continueranno a comparire nei nostri calcoli, rappresentano appunto, cambiate di segno, le curvature principali delle tre superficie coordinate. Finalmente le formole precedenti assumono la forma definitiva

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} &= -\mathcal{G}_{12} x_2 - \mathcal{G}_{13} x_3 - 1, & \frac{\partial x_2}{\partial s_3} &= \mathcal{G}_{32} x_3, & \frac{\partial x_3}{\partial s_2} &= \mathcal{G}_{23} x_2 \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_2} &= -\mathcal{G}_{23} x_3 - \mathcal{G}_{21} x_1 - 1, & \frac{\partial x_3}{\partial s_1} &= \mathcal{G}_{13} x_1, & \frac{\partial x_1}{\partial s_3} &= \mathcal{G}_{31} x_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial s_3} &= -\mathcal{G}_{31} x_1 - \mathcal{G}_{32} x_2 - 1, & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} &= \mathcal{G}_{21} x_2, & \frac{\partial x_2}{\partial s_1} &= \mathcal{G}_{12} x_1. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Son queste le condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto definito dalle coordinate x_1, x_2, x_3 .

3. Applicando alle funzioni x la condizione d'integrabilità, relativa alla superficie q_k , cioè

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) \frac{\partial}{\partial s_j} = \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial s_i}, \quad (7)$$

si trovano sei relazioni differenziali fra le \mathcal{G} , note col nome di formole

di Lamé; ma queste relazioni si possono anche ottenere senza calcoli scrivendo le formole di Codazzi relative alle tre superficie coordinate. Così, per esempio, la formola di Gauss

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1^2 + \mathcal{G}_2^2 = \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2,$$

quando vi si fa $\mathfrak{E} = 0$ e vi si cambiano $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ rispettivamente in $\mathcal{G}_{ij}, \mathcal{G}_{ji}, -\mathcal{G}_{ik}, -\mathcal{G}_{jk}$, diventa

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \frac{\partial \mathcal{G}_{ji}}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ij}^2 + \mathcal{G}_{ji}^2 + \mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk} = 0,$$

e dà luogo ad una prima terna di relazioni. Similmente le formole

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial s_1} = (\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2) \mathcal{G}_2, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial s_2} = (\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1) \mathcal{G}_1$$

diventano

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{jk}}{\partial s_i} + (\mathcal{G}_{jk} - \mathcal{G}_{ik}) \mathcal{G}_{ji} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}_{ik}}{\partial s_j} + (\mathcal{G}_{ik} - \mathcal{G}_{jk}) \mathcal{G}_{ij} = 0;$$

ma queste si riducono ad una terna sola, perchè si ha, in virtù di (3),

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{kj}}{\partial s_i} = \frac{1}{Q_i Q_j} \left(\frac{\partial^2 \log Q_k}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial \log Q_k}{\partial q_j} \frac{\partial \log Q_j}{\partial q_i} \right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ki}}{\partial s_j} = \frac{1}{Q_i Q_j} \left(\frac{\partial^2 \log Q_k}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial \log Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial \log Q_i}{\partial q_j} \right),$$

cioè

$$\frac{1}{Q_i Q_j} \frac{\partial^2 \log Q_k}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial \mathcal{G}_{kj}}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{kj} \mathcal{G}_{ji} = \frac{\partial \mathcal{G}_{ki}}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ki} \mathcal{G}_{ij},$$

e conseguentemente

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{kj}}{\partial s_i} + (\mathcal{G}_{kj} - \mathcal{G}_{ij}) \mathcal{G}_{ji} = \frac{\partial \mathcal{G}_{ki}}{\partial s_j} + (\mathcal{G}_{ki} - \mathcal{G}_{ji}) \mathcal{G}_{ij}. \quad (8)$$

Dunque le formole di Lamé sono

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{G}_{32}}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{23}}{\partial s_3} + \mathcal{G}_{32}^2 + \mathcal{G}_{23}^2 + \mathcal{G}_{21} \mathcal{G}_{31} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{13}}{\partial s_3} + \frac{\partial \mathcal{G}_{31}}{\partial s_1} + \mathcal{G}_{13}^2 + \mathcal{G}_{31}^2 + \mathcal{G}_{32} \mathcal{G}_{12} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{21}}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{12}}{\partial s_2} + \mathcal{G}_{21}^2 + \mathcal{G}_{12}^2 + \mathcal{G}_{13} \mathcal{G}_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{G}_{13}}{\partial s_2} + (\mathcal{G}_{13} - \mathcal{G}_{23}) \mathcal{G}_{12} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{21}}{\partial s_3} + (\mathcal{G}_{21} - \mathcal{G}_{31}) \mathcal{G}_{23} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{32}}{\partial s_1} + (\mathcal{G}_{32} - \mathcal{G}_{12}) \mathcal{G}_{31} = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{G}_{12}}{\partial s_3} + (\mathcal{G}_{12} - \mathcal{G}_{23}) \mathcal{G}_{13} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{23}}{\partial s_1} + (\mathcal{G}_{23} - \mathcal{G}_{13}) \mathcal{G}_{21} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{31}}{\partial s_2} + (\mathcal{G}_{31} - \mathcal{G}_{21}) \mathcal{G}_{32} = 0 \end{cases}$$

e stabiliscono, come si vede, un vincolo necessario fra le curvatures principali delle superficie coordinate e le loro variazioni. Noi possiamo anche considerarle come equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, cui debbono soddisfare le funzioni Q , giacchè si trasformano facilmente, mediante la formola (3), in

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{Q_2} \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{Q_3} \frac{\partial Q_2}{\partial q_3} \right) + \frac{1}{Q_1^2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{Q_3} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{Q_1} \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{Q_2^2} \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{Q_1} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{Q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{Q_3^2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} \frac{\partial Q_2}{\partial q_3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial q_2 \partial q_2} &= \frac{1}{Q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} + \frac{1}{Q_3} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} \frac{\partial Q_3}{\partial q_2}, \\ \frac{\partial^2 Q_2}{\partial q_3 \partial q_3} &= \frac{1}{Q_3} \frac{\partial Q_2}{\partial q_3} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} + \frac{1}{Q_1} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3}, \\ \frac{\partial^2 Q_3}{\partial q_1 \partial q_1} &= \frac{1}{Q_1} \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} + \frac{1}{Q_2} \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

4. Mentre nel piano una coppia di direzioni ortogonali, definita per ogni punto, si può sempre considerare come quella delle tangenti, in questo punto, alle due linee d'un sistema doppio ortogonale, *nello spazio invece non ha luogo l'analogia propria per una terna ortogonale*, pure definita in ogni punto. Questo notevole fatto risulterà dalle condizioni restrittive, che noi presto scopriremo indagando se la terna definita dagli elementi del determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1,$$

rispetto alla terna variabile delle tangenti alle linee d'un sistema triplo ortogonale, può essere quella delle tangenti alle linee d'un altro sistema triplo ortogonale. Riferito lo spazio al nuovo sistema, esprimiamo che le condizioni d'immobilità del punto (x_1, x_2, x_3) debbono essere soddisfatte dalle nuove coordinate

$$x'_i = \alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i x_3,$$

avvertendo che le formole

$$\frac{\partial}{\partial s'_i} = \alpha_i \frac{\partial}{\partial s_1} + \beta_i \frac{\partial}{\partial s_2} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial s_3}, \quad (10)$$

per $i=1,2,3$, son quelle che somministrano i quozienti differenziali relativi ai nuovi assi. Affinchè siano soddisfatte le condizioni (6) occorre intanto che si abbia identicamente

$$\frac{\partial x'_i}{\partial s'_j} = \mathcal{G}'_{ji} x'_j, \quad \frac{\partial x'_i}{\partial s'_k} = \mathcal{G}'_{ki} x'_k, \quad (11)$$

cioè, considerando per ora soltanto la prima eguaglianza,

$$\left(\alpha_j \frac{\partial}{\partial s_1} + \beta_j \frac{\partial}{\partial s_2} + \gamma_j \frac{\partial}{\partial s_3}\right)(\alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i x_3) = \mathcal{G}'_{ji}(\alpha_j x_1 + \beta_j x_2 + \gamma_j x_3).$$

Questa si scinde nelle tre

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_j \mathcal{G}'_{ji} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_j} + \beta_i(\alpha_j \mathcal{G}_{i2} - \beta_j \mathcal{G}_{2i}) - \gamma_i(\gamma_j \mathcal{G}_{3i} - \alpha_j \mathcal{G}_{i3}) \\ \beta_j \mathcal{G}'_{ji} &= \frac{\partial \beta_i}{\partial s_j} + \gamma_i(\beta_j \mathcal{G}_{23} - \gamma_j \mathcal{G}_{32}) - \alpha_i(\alpha_j \mathcal{G}_{i2} - \beta_j \mathcal{G}_{2i}) \\ \gamma_j \mathcal{G}'_{ji} &= \frac{\partial \gamma_i}{\partial s_j} + \alpha_i(\gamma_j \mathcal{G}_{3i} - \alpha_j \mathcal{G}_{i3}) - \beta_i(\beta_j \mathcal{G}_{23} - \gamma_j \mathcal{G}_{32}), \end{aligned} \right. \quad (12)$$

le quali, moltiplicate per $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$, e sommate, danno

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'_{ji} &= -\alpha_j(\varepsilon_{k1} + \gamma_k \mathcal{G}_{i2} - \beta_k \mathcal{G}_{i3}) \\ &\quad - \beta_j(\varepsilon_{k2} + \alpha_k \mathcal{G}_{23} - \gamma_k \mathcal{G}_{2i}) \\ &\quad - \gamma_j(\varepsilon_{k3} + \beta_k \mathcal{G}_{3i} - \alpha_k \mathcal{G}_{32}), \end{aligned} \quad (13)$$

ponendo

$$\alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial s_v} + \beta_i \frac{\partial \beta_j}{\partial s_v} + \gamma_i \frac{\partial \gamma_j}{\partial s_v} = -\left(\alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_v} + \beta_j \frac{\partial \beta_i}{\partial s_v} + \gamma_j \frac{\partial \gamma_i}{\partial s_v}\right) = \varepsilon_{kv},$$

ed osservando che nel determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_j & \beta_j & \gamma_j \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k \end{vmatrix} = 1$$

ciascun elemento è uguale al proprio complemento algebrico. Similmente dalle tre relazioni analoghe alle (12), in cui si scinde la seconda uguaglianza (11), si deduce

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'_{ki} &= \alpha_k(\varepsilon_{j1} + \gamma_j \mathcal{G}_{i2} - \beta_j \mathcal{G}_{i3}) \\ &\quad + \beta_k(\varepsilon_{j2} + \alpha_j \mathcal{G}_{23} - \gamma_j \mathcal{G}_{2i}) \\ &\quad + \gamma_k(\varepsilon_{j3} + \beta_j \mathcal{G}_{3i} - \alpha_j \mathcal{G}_{32}). \end{aligned} \quad (14)$$

È poi facile verificare che, soddisfatte le (11), si ha pure i denticamente

$$\frac{\partial x'_i}{\partial s'_i} = -\mathcal{G}'_{ij} x'_j - \mathcal{G}'_{ik} x'_k - 1,$$

sono cioè soddisfatte tutte le condizioni (6) anche nel nuovo sistema. Ciò premesso, l'eliminazione delle \mathcal{G}' fra le (12) o fra le relazioni analoghe conduce in ogni caso alla terna di condizioni

$$\alpha_i \varepsilon_{i1} + \beta_i \varepsilon_{i2} + \gamma_i \varepsilon_{i3} = (\mathcal{G}_{21} - \mathcal{G}_{31})\beta_i \gamma_i + (\mathcal{G}_{32} - \mathcal{G}_{12})\gamma_i \alpha_i + (\mathcal{G}_{13} - \mathcal{G}_{23})\alpha_i \beta_i. \quad (15)$$

5. Queste condizioni provengono dalla necessità di *orientare le nuove terne di assi in modo che sussista il teorema di Dupin* anche nel nuovo sistema. Infatti, se si applicano le formole fondamentali alla direzione $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, si trova che alle (12) si può dar la forma

$$\alpha_j \mathcal{Q}'_{ji} = \frac{\delta \alpha_i}{\delta s'_j}, \quad \beta_j \mathcal{Q}'_{ji} = \frac{\delta \beta_i}{\delta s'_j}, \quad \gamma_j \mathcal{Q}'_{ji} = \frac{\delta \gamma_i}{\delta s'_j},$$

ed è chiaro che ogni relazione ottenuta eliminando \mathcal{Q}'_{ji} fra queste uguaglianze è necessariamente contenuta in (15). Ora, sommando le predette uguaglianze, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, si ottiene la relazione

$$\alpha_k \frac{\delta \alpha_i}{\delta s'_j} + \beta_k \frac{\delta \beta_i}{\delta s'_j} + \gamma_k \frac{\delta \gamma_i}{\delta s'_j} = 0,$$

che si deve dunque considerare come una nuova forma della (15). Intanto questa relazione, scritta nel seguente modo

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \delta \alpha_i \\ \beta_i & \beta_j & \delta \beta_i \\ \gamma_i & \gamma_j & \delta \gamma_i \end{vmatrix} = 0,$$

esprime appunto (cfr. IX, form. 19) che l'asse x'_i genera una sviluppabile quando l'origine tende a spostarsi lungo l'asse x'_j . È dunque vero che *la condizione (15) chiude in sé quanto basta ed occorre per la conservazione del teorema di Dupin*.

6. Torniamo alle (15) per cercare di dedurne una relazione unica, alla quale debba isolatamente soddisfare ciascuna terna di coseni. Prima osserviamo che, essendo

$$\varepsilon_{iv} = \sum \alpha_j \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_v} = - \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k & \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_v} \\ \beta_i & \beta_k & \frac{\partial \beta_k}{\partial s_v} \\ \gamma_i & \gamma_k & \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_v} \end{vmatrix},$$

al primo membro di (15) si può dar la forma

$$- \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k & \alpha_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_1} + \beta_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_2} + \gamma_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_3} \\ \beta_i & \beta_k & \alpha_i \frac{\partial \beta_k}{\partial s_1} + \beta_i \frac{\partial \beta_k}{\partial s_2} + \gamma_i \frac{\partial \beta_k}{\partial s_3} \\ \gamma_i & \gamma_k & \alpha_i \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_1} + \beta_i \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_2} + \gamma_i \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_3} \end{vmatrix}.$$

Ne segue che, se si rappresenta con $F_k(\alpha, \beta, \gamma)$ la forma quadratica

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_k & \alpha \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_1} + \beta \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_2} + \gamma \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_3} \\ \beta & \beta_k & \alpha \frac{\partial \beta_k}{\partial s_1} + \beta \frac{\partial \beta_k}{\partial s_2} + \gamma \frac{\partial \beta_k}{\partial s_3} \\ \gamma & \gamma_k & \alpha \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_1} + \beta \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_2} + \gamma \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_3} \end{vmatrix} + \sum (\mathcal{G}_{21} - \mathcal{G}_{31}) \beta \gamma ,$$

le terne $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ed $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ sono le due soluzioni del sistema

$$F_k(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad , \quad \alpha \alpha_k + \beta \beta_k + \gamma \gamma_k = 0 \quad , \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad ,$$

vale a dire che le terne stesse definiscono le direzioni di quelle generatrici del cono quadrico $F_k = 0$, che stanno nel piano perpendicolare alla direzione $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$. Qui si noti che le due direzioni debbono risultare fra loro perpendicolari, e però la forma F_k non è qualunque, ma deve per $\alpha = \alpha_k, \beta = \beta_k, \gamma = \gamma_k$ ridursi (come è facile vedere) alla somma dei coefficienti dei termini quadrati, vale a dire che dev'essere

$$\sum (\beta_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial s_1} - \gamma_k \frac{\partial \beta_k}{\partial s_1}) = \sum (\mathcal{G}_{21} - \mathcal{G}_{31}) \beta_k \gamma_k \quad ,$$

cioè

$$\sum \alpha_k \left[\left(\frac{\partial}{\partial s_3} + \mathcal{G}_{33} \right) \beta_k - \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_{23} \right) \gamma_k \right] = 0 \quad ;$$

ma questa condizione è soddisfatta identicamente, come si riconosce subito osservando che, se u è la funzione che definisce il sistema delle superficie normali alle direzioni $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$, si ha

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_1} \quad , \quad \beta_k = \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_2} \quad , \quad \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial s_3} \quad .$$

Fin qui non si è tenuto conto della terza condizione (15), alla quale si può dare l'una o l'altra delle forme

$$F_i(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) = 0 \quad , \quad F_j(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) = 0 \quad .$$

Se in una di queste relazioni si sostituiscono i valori di $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ o $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$, che il sistema precedentemente considerato fornisce in funzione dei coseni $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ e delle loro prime derivate, si giunge ad una relazione non identica fra questi coseni e le loro derivate prime e seconde, la quale relazione deve essere evidentemente soddisfatta anche dalle altre due terne di coseni. Se poi per $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ si pongono i valori testè scritti in funzione di u , si ottiene la relazione di Bonnet, cioè un'equazione alle derivate parziali terze di u , necessaria e sufficiente perchè u definisca un sistema di superficie, apparte-

nente ad un sistema triplo ortogonale. Adunque, mentre ogni semplice infinità di curve piane costituisce con le sue traiettorie ortogonali un doppio sistema di curve, ben raramente avviene, nello spazio a tre dimensioni, che un sistema di superficie faccia parte d'un triplo sistema ortogonale. Ciò si spiega sempre col teorema di Dupin, giacchè, dato un sistema di superficie, è ben difficile che le sue linee di curvatura si lascino associare in modo da costituire altri due sistemi di superficie, ortogonali a quelle del sistema dato. Invece qualunque superficie appartiene ad un sistema triplo ortogonale, perchè basta, per esempio, associare ad essa le infinite superficie parallele (XI, 27), e costituire gli altri due sistemi con le sviluppabili delle comuni normali lungo le linee di curvatura. In altri termini *ogni sistema di superficie parallele fa parte d'un triplo sistema ortogonale*. È anche facile vedere che *qualunque sistema di piani o di sfere appartiene ad un sistema triplo ortogonale*, e ciò si deve appunto (XI, 2) alla completa libertà di cui si gode nella scelta delle linee di curvatura sul piano e sulla sfera.

7. Per calcolare il *parametro differenziale secondo* noi avremo bisogno di considerare la somma \mathcal{Q}_i delle \mathcal{Q} che hanno il secondo indice uguale ad i , cioè

$$\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{ji} + \mathcal{Q}_{ki} = \frac{\partial}{\partial s_i} \log Q_j Q_k . \quad (16)$$

Se si osserva che dal sistema

$$\begin{aligned} \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_v} + \beta_i \frac{\partial \beta_i}{\partial s_v} + \gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial s_v} &= 0 \\ \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_v} + \beta_j \frac{\partial \beta_i}{\partial s_v} + \gamma_j \frac{\partial \gamma_i}{\partial s_v} &= -\varepsilon_{\lambda v} \\ \alpha_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_v} + \beta_k \frac{\partial \beta_i}{\partial s_v} + \gamma_k \frac{\partial \gamma_i}{\partial s_v} &= \varepsilon_{jv} \end{aligned}$$

si trae

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_v} = \alpha_k \varepsilon_{jv} - \alpha_j \varepsilon_{kv} , \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial s_v} = \beta_k \varepsilon_{jv} - \beta_j \varepsilon_{kv} , \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial s_v} = \gamma_k \varepsilon_{jv} - \gamma_j \varepsilon_{kv} ,$$

le formole (13) e (14), sommate, danno

$$\mathcal{Q}'_i = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_1 \right) \alpha_i + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{Q}_2 \right) \beta_i + \left(\frac{\partial}{\partial s_3} + \mathcal{Q}_3 \right) \gamma_i .$$

Ciò premesso, ripetendo l'operazione (10) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} &= \alpha_i^2 \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \beta_i^2 \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + \dots + \beta_i \gamma_i \left(\frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} + \frac{\partial^2}{\partial s_3 \partial s_2} \right) + \dots \\ &+ \left(\alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_1} + \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_2} + \gamma_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_3} \right) \frac{\partial}{\partial s_1} + \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_i}{\partial s_1} + \beta_i \frac{\partial \beta_i}{\partial s_2} + \gamma_i \frac{\partial \beta_i}{\partial s_3} \right) \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots , \end{aligned}$$

poi

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s'_i} + \mathcal{G}'_i\right) \frac{\partial}{\partial s'_i} &= \alpha_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1\right) \frac{\partial}{\partial s_1} + \beta_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2\right) \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots \\ &+ \beta_i \gamma_i \left[\left(\frac{\partial}{\partial s_3} + \mathcal{G}_3\right) \frac{\partial}{\partial s_3} + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2\right) \frac{\partial}{\partial s_2} \right] + \dots \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (\alpha_i^2) + \frac{\partial}{\partial s_2} (\alpha_i \beta_i) + \frac{\partial}{\partial s_3} (\alpha_i \gamma_i) \right] \frac{\partial}{\partial s_i} \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (\beta_i \alpha_i) + \frac{\partial}{\partial s_2} (\beta_i^2) + \frac{\partial}{\partial s_3} (\beta_i \gamma_i) \right] \frac{\partial}{\partial s_2} \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (\gamma_i \alpha_i) + \frac{\partial}{\partial s_2} (\gamma_i \beta_i) + \frac{\partial}{\partial s_3} (\gamma_i^2) \right] \frac{\partial}{\partial s_3}, \end{aligned}$$

e finalmente

$$\sum \left(\frac{\partial}{\partial s'_i} + \mathcal{G}'_i\right) \frac{\partial}{\partial s'_i} = \sum \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_i\right) \frac{\partial}{\partial s_i}.$$

Così viene in evidenza la proprietà invariantiva dell'operazione

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1\right) \frac{\partial}{\partial s_1} + \left(\frac{\partial}{\partial s_2} + \mathcal{G}_2\right) \frac{\partial}{\partial s_2} + \left(\frac{\partial}{\partial s_3} + \mathcal{G}_3\right) \frac{\partial}{\partial s_3},$$

alla quale si può anche, per la (16), dar la forma

$$\Delta^2 = \frac{1}{Q_1 Q_2 Q_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{Q_2 Q_3}{Q_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{Q_3 Q_1}{Q_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{Q_1 Q_2}{Q_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right],$$

indicata da Lamé.

8. Le relazioni (9) ci avvertono che lo spazio fin qui considerato, e nel quale abbiamo precedentemente studiate le curve e le superficie, non è il più generale spazio a tre dimensioni che si possa immaginare. Noi concepiamo infatti lo spazio come un sistema triplamente infinito di punti, ciascuno dei quali sia individuato da una terna di valori attribuiti ai parametri q_1, q_2, q_3 , e sia vincolato ai punti infinitamente vicini dalla condizione di avere da essi una distanza espressa mediante la formola (2) per una data terna *arbitraria* di funzioni Q . Le relazioni trovate fra le Q sono dunque indizio manifesto d'una particolarizzazione dello spazio, e questa è avvenuta di fatto in seguito all'ipotesi da noi tacitamente introdotta che nello spazio considerato sia lecito impiantare il sistema delle coordinate cartesiane, e per conseguenza esistano tre funzioni x_1, x_2, x_3 di q_1, q_2, q_3 , tali che l'espressione (2) sia riducibile alla forma

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (17)$$

È del resto facile ritrovare con procedimento diretto le formole di Lamé come necessarie e sufficienti per la possibilità di tale riduzione. Qui conviene rammentare che già nel piano noi ci eravamo imbattuti (VIII, 10) in una relazione fra le curvatures delle linee di qualunque doppio sistema ortogona-

le, relazione esprimente appunto la possibilità di ridurre il quadrato dell'arco elementare alla forma $dx_1^2 + dx_2^2$, mentre sulle superficie curve nessun legame necessario intercede tra le funzioni Q . Lo spazio da noi studiato, e che d'ora innanzi distingueremo dagli altri chiamandolo *lineare*, rappresenta dunque fra tutti i possibili spazii a tre dimensioni quello che il piano è fra le superficie curve, e però noi chiameremo *curvi* gli spazii non lineari, riservandoci di precisare, in seguito, il concetto di curvatura.

9. Come per lo studio delle linee e delle superficie curve noi abbiamo riferito lo spazio che le contiene ad un sistema cartesiano, così ci sarà utile supporre che la tripla infinità di punti, definiti dalle terne (q_1, q_2, q_3) ed ordinati secondo la legge (2), faccia parte d'una quadrupla infinità lineare di punti, o, come si suol dire, sia immersa in uno *spazio lineare a quattro dimensioni*. Immaginiamo dunque un sistema quattro volte infinito di punti, ciascuno dei quali sia individuato da una quaterna di valori attribuiti ai parametri q_1, q_2, q_3, q_4 , e sia vincolato ai punti infinitamente vicini dalla condizione di avere da essi una distanza, il cui quadrato sia espresso dalla forma $Q_1^2 dq_1^2 + \dots + Q_4^2 dq_4^2$, supposta trasformabile linearmente in $dx_1^2 + \dots + dx_4^2$. Questa si riduce alla (17) quando una x si mantiene costante, e poichè ogni trasformazione lineare ortogonale, eseguita sulle x , lascia inalterata la forma stessa, possiamo più generalmente affermare che in uno spazio lineare a quattro dimensioni *ogni equazione lineare fra le coordinate cartesiane, relative ad assi immobili, rappresenta uno spazio lineare a tre dimensioni*. Così vien giustificata la denominazione di spazio *lineare* e si trova in pari tempo il modo di trasportare rapidamente a tali spazii la terminologia geometrica ed i principii fondamentali dell'ordinaria Geometria analitica della retta e del piano. Lasciamo al lettore la cura di familiarizzarsi con tale estensione, e di ripetere qui le considerazioni del § 1, per vedere come, obbligando una funzione u delle coordinate dei punti d'uno spazio lineare a quattro dimensioni a conservare un dato valore, si riesca a staccare dallo spazio stesso uno spazio (generalmente curvo) a tre dimensioni, che in ogni punto M ammette una retta *normale* nella direzione della più rapida variazione di u , ed uno spazio lineare *tangente* a tre dimensioni, determinato dalle rette secondo le quali la variazione di u è infinitesima d'un ordine superiore rispetto allo spostamento di M .

10. Consideriamo un punto che si sposta in uno spazio lineare a quattro dimensioni lungo una curva, e siano M', M'', \dots le posizioni che successivamente va occupando, ad intervalli infinitesimi, partendo da una posizione arbitraria M . La *tangente* alla curva, in M , si definisce sempre come limite della retta MM' , quando M' tende ad M , e noi diremo brevemente che l'elemento lineare MM' determina la tangente, sottintendendo il passaggio al limite ogni volta che impiegheremo locuzioni analoghe. Così potremo subito dire che *due* elementi successivi, MM' ed $M'M''$, determinano il *piano*

osculatore, come *tre* elementi determinano lo *spazio lineare osculatore*, che in generale varia da un punto all'altro della curva. La perpendicolare condotta per M allo spazio osculatore si può ben chiamare *trinormale*, in quanto è perpendicolare a tre tangenti infinitamente vicine. Essa appartiene al *piano binormale*, luogo delle infinite *binormali*, o perpendicolari condotte per M a due elementi successivi, come il piano binormale appartiene allo *spazio normale*, in cui stanno tutte le *normali*, in numero doppiamente infinito, condotte per M alla tangente. La perpendicolare elevata per M alla trinormale nel piano binormale è la *binormale principale*, e la perpendicolare al piano binormale, elevata per M nello spazio normale, è la *normale principale*. Si costituisce così la quaterna fondamentale della curva: tangente, trinormale, binormale principale, normale principale. Se queste rette, perpendicolari fra loro due a due, si prendono come assi, e se rispetto ad esse le coordinate cartesiane d'un punto fisso si rappresentano ordinatamente con x'_1, x'_2, x'_3, x' , si vedrà nel capitolo seguente che le condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto sono

$$\frac{dx'_1}{ds} = \frac{\alpha'}{\rho} - 1, \quad \frac{dx'_2}{ds} = \frac{\alpha'_2}{\tau}, \quad \frac{dx'_3}{ds} = \frac{\alpha'}{r} - \frac{\alpha'_2}{\tau}, \quad \frac{dx'}{ds} = -\frac{\alpha'_1}{\rho} - \frac{\alpha'_3}{r}, \quad (18)$$

dove τ è, come ρ ed r , un raggio di curvatura, che saremo condotti a considerare per misurare la tendenza che ha il punto M, nel percorrere la curva, ad allontanarsi più o meno rapidamente dallo spazio osculatore.

11. Prendiamo una linea in uno spazio curvo, la cui normale in M sia determinata nello spazio normale, rispetto agli assi x'_2, x'_3, x' , dai coseni direttori $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Altre due rette, perpendicolari fra loro ed alla prima, siano determinate nel detto spazio normale dai coseni $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ed $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, in guisa che si abbia

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1. \quad (19)$$

Rispetto alla tangente ed alle tre normali testè definite le coordinate del punto fisso sono $x_1 = x'_1$ e

$$x = \alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x', \quad x_2 = \alpha_2 x'_2 + \beta_2 x'_3 + \gamma_2 x', \quad x_3 = \alpha_3 x'_2 + \beta_3 x'_3 + \gamma_3 x'.$$

Ciò premesso, le condizioni (18) si trasformano agevolmente nelle seguenti

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -\mathfrak{C}_2 x_2 + \mathfrak{C}_3 x_3 - \mathfrak{N} x_1, & \frac{dx_2}{ds} = \mathfrak{G}_2 x_1 + \mathfrak{C}_2 x - \mathfrak{C}_1 x_3, \\ \frac{dx_1}{ds} = -\mathfrak{G}_2 x_2 - \mathfrak{G}_3 x_3 + \mathfrak{N} x - 1, & \frac{dx_3}{ds} = \mathfrak{G}_3 x_1 - \mathfrak{C}_3 x + \mathfrak{C}_1 x_2, \end{cases} \quad (20)$$

in cui si è posto

$$\mathfrak{N} = \frac{\gamma_1}{\rho}, \quad \mathfrak{G}_2 = -\frac{\gamma_2}{\rho}, \quad \mathfrak{G}_3 = -\frac{\gamma_3}{\rho},$$

ed anche

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\gamma_1}{\rho} - \varepsilon_1, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\alpha_2}{r} + \frac{\gamma_2}{\rho} - \varepsilon_2, \quad \mathcal{E}_3 = \frac{\alpha_3}{r} + \frac{\gamma_3}{\rho} - \varepsilon_3.$$

Dalle formole (20) si ricade naturalmente sulle note (XI, 3) condizioni d'immobilità, relative alle superficie, supponendo nulla la terza curvatura, nel qual caso il determinante (19) diventa

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{sen } \psi & \text{cos } \psi \\ 0 & \text{cos } \psi & -\text{sen } \psi \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

e $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{G}_2$ sono costantemente uguali a zero.

12. Ora immaginiamo altre curve, tangenti in M agli assi x_2 ed x_3 , e distinguiamo con un indice i tutto ciò che riguarda la curva tangente ad Mx_i . Le formole (20) danno luogo alle seguenti relazioni:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial s_1} = -\mathcal{O}_1 x_1 - \mathcal{E}_{12} x_2 + \mathcal{E}_{13} x_3, \quad \frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \mathcal{O}_1 x - \mathcal{G}_{12} x_2 - \mathcal{G}_{13} x_3 - 1 \\ \frac{\partial x}{\partial s_2} = \mathcal{E}_{21} x_1 - \mathcal{O}_2 x_2 - \mathcal{E}_{23} x_3, \quad \frac{\partial x_2}{\partial s_2} = -\mathcal{G}_{21} x_1 + \mathcal{O}_2 x - \mathcal{G}_{23} x_3 - 1 \\ \frac{\partial x}{\partial s_3} = -\mathcal{E}_{31} x_1 + \mathcal{E}_{32} x_2 - \mathcal{O}_3 x_3, \quad \frac{\partial x_3}{\partial s_3} = -\mathcal{G}_{31} x_1 - \mathcal{G}_{32} x_2 + \mathcal{O}_3 x - 1 \end{array} \right. (B)$$

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} = \mathcal{G}_{23} x_3 + \mathcal{E}_{23} x - \mathcal{E}_{21} x_1, \quad \frac{\partial x_3}{\partial s_3} = \mathcal{G}_{32} x_2 - \mathcal{E}_{32} x + \mathcal{E}_{33} x_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_3} = \mathcal{G}_{31} x_3 + \mathcal{E}_{31} x - \mathcal{E}_{33} x_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial s_1} = \mathcal{G}_{13} x_1 - \mathcal{E}_{13} x + \mathcal{E}_{11} x_2 \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} = \mathcal{G}_{12} x_1 + \mathcal{E}_{12} x - \mathcal{E}_{11} x_3, \quad \frac{\partial x_1}{\partial s_2} = \mathcal{G}_{21} x_2 - \mathcal{E}_{21} x + \mathcal{E}_{22} x_3 \end{array} \right. (C)$$

Da queste risulta subito che, per $x = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, i quozienti differenziali

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s_1^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_2^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_3^2}; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_3 \partial s_1}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2}; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_3 \partial s_2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1}$$

prendono i valori

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3; \quad \mathcal{E}_{23}, \mathcal{E}_{31}, \mathcal{E}_{12}; \quad -\mathcal{E}_{32}, -\mathcal{E}_{13}, -\mathcal{E}_{21},$$

e che i valori analoghi per le funzioni x_1, x_2, x_3 sono, rispettivamente,

$$\begin{array}{l} 0, \quad -\mathcal{G}_{21}, \quad -\mathcal{G}_{31}; \quad -\mathcal{E}_{22}, \quad 0, \quad \mathcal{G}_{12}; \quad \mathcal{E}_{33}, \quad \mathcal{G}_{13}, \quad 0, \\ -\mathcal{G}_{12}, \quad 0, \quad -\mathcal{G}_{32}; \quad \mathcal{G}_{23}, \quad -\mathcal{E}_{33}, \quad 0; \quad 0, \quad \mathcal{E}_{11}, \quad \mathcal{G}_{21}, \\ -\mathcal{G}_{13}, \quad -\mathcal{G}_{23}, \quad 0; \quad 0, \quad \mathcal{G}_{31}, \quad -\mathcal{E}_{11}; \quad \mathcal{G}_{32}, \quad 0, \quad \mathcal{E}_{22}. \end{array}$$

Ora la nota condizione

$$\frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} - \frac{\partial^2}{\partial s_j \partial s_i} = \frac{\partial \log Q_j}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} - \frac{\partial \log Q_i}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_i}, \quad (21)$$

applicata alla funzione x , dà immediatamente $\mathcal{C}_{ij} + \mathcal{C}_{ji} = 0$, e però possiamo porre

$$T_1 = \mathcal{C}_{32} = -\mathcal{C}_{23} \quad , \quad T_2 = \mathcal{C}_{13} = -\mathcal{C}_{31} \quad , \quad T_3 = \mathcal{C}_{21} = -\mathcal{C}_{12} \quad .$$

Applicata invece alle funzioni x_1, x_2, x_3 la stessa condizione ci dice che le \mathcal{G}_{ij} sono ancora espresse dalla formola (3), ed inoltre si hanno le uguaglianze $\mathcal{C}_{ii} = 0$, nelle quali sta il *teorema di Dupin*. Dopo ciò le condizioni d'immobilità si possono porre sotto la loro forma definitiva. Le (B) restano inalterate, le (A) diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial s_1} = -\mathcal{N}_1 x_1 + T_2 x_2 + T_3 x_3 \quad , \\ \frac{\partial x}{\partial s_2} = T_3 x_1 - \mathcal{N}_2 x_2 + T_1 x_3 \quad , \\ \frac{\partial x}{\partial s_3} = T_2 x_1 + T_1 x_2 - \mathcal{N}_3 x_3 \quad , \end{array} \right.$$

mentre le (C) e le (C') si riducono alla forma semplicissima

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} = \mathcal{G}_{12} x_1 - T_2 x \quad , \quad \frac{\partial x_3}{\partial s_2} = \mathcal{G}_{23} x_2 - T_1 x \quad , \quad \frac{\partial x_1}{\partial s_3} = \mathcal{G}_{31} x_3 - T_3 x \quad , \\ \frac{\partial x_3}{\partial s_1} = \mathcal{G}_{13} x_1 - T_3 x \quad , \quad \frac{\partial x_1}{\partial s_2} = \mathcal{G}_{21} x_2 - T_2 x \quad , \quad \frac{\partial x_2}{\partial s_3} = \mathcal{G}_{32} x_3 - T_1 x \quad . \end{array} \right.$$

Si noti che alle (A) si può anche dare la forma

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s_3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \quad , \quad (22)$$

rappresentando con Φ la forma quadratica definita dal discriminante

$$K = \begin{vmatrix} \mathcal{N}_1 & -T_2 & -T_3 \\ -T_2 & \mathcal{N}_2 & -T_1 \\ -T_3 & -T_1 & \mathcal{N}_3 \end{vmatrix} \quad ,$$

che ha una grande importanza nello studio della curvatura. Presto vedremo che K si può esprimere mediante le sole curvature \mathcal{G} . All'uopo ci converrà fare uso del determinante reciproco, i cui elementi rappresenteremo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_3 - T_1^2 \quad , \quad K_{22} = K_{33} = \mathcal{N}_1 T_1 + T_2 T_3 \quad , \\ K_{22} &= \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_3 - T_2^2 \quad , \quad K_{31} = K_{13} = \mathcal{N}_2 T_2 + T_3 T_1 \quad , \\ K_{33} &= \mathcal{N}_3 \mathcal{N}_1 - T_3^2 \quad , \quad K_{12} = K_{21} = \mathcal{N}_3 T_3 + T_1 T_2 \quad . \end{aligned}$$

13. Prima di andare oltre approfittiamo dei risultati precedenti per mostrare come si estenda il *teorema di Eulero* (XI, 10) agli spazii di tre dimensioni. La curvatura della sezione normale piana, la cui tangente è deter-

minata, nello spazio lineare tangente, dai coseni direttori α, β, γ , è sempre misurata da $\frac{d^2x}{ds^2}$ per $x = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, essendo

$$\frac{d}{ds} = \alpha \frac{\partial}{\partial s_1} + \beta \frac{\partial}{\partial s_2} + \gamma \frac{\partial}{\partial s_3} .$$

Essa è dunque data da

$$\alpha^3 \frac{\partial^2 x}{\partial s_1^2} + \beta^3 \frac{\partial^2 x}{\partial s_2^2} + \dots + \beta \gamma \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_3} + \frac{\partial^2 x}{\partial s_3 \partial s_2} \right) + \dots$$

per $x = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, cioè

$$\frac{1}{\rho} = \Phi(\alpha, \beta, \gamma) .$$

La discussione di questa formola dà risultati completamente analoghi a quelli della teoria delle superficie, ed in particolare conduce a considerare tre *curvature principali*, corrispondenti agli assi del cono quadrico $\Phi = 0$, luogo delle tangenti alle infinite assintotiche, reali o immaginarie, che passano per ogni punto. Il prodotto delle curvature principali è appunto K , e può servire a misurare la *curvatura totale*, mentre gli invarianti ortogonali

$$1/3 (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3) , \quad 1/3 (K_{11} + K_{22} + K_{33})$$

misurano piuttosto due *curvature medie* dello spazio, intorno al punto considerato. Se si vuole che la normale allo spazio generi una sviluppabile, si è condotti ad esprimere, osservando le (22), che i maggiori determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} & \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

son tutti nulli, vale a dire che si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} : \alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} : \beta = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} : \gamma ,$$

e si trovano così gli assi di Φ . I sistemi di curvatura sono dunque caratterizzati dal costante annullarsi di T_1, T_2, T_3 . Per essi le relazioni (A), (C) e (C') si riducono alla forma oltremodo semplice

$$\frac{\partial x}{\partial s_i} = -\mathcal{C}_i x_i , \quad \frac{\partial x_j}{\partial s_i} = \mathcal{C}_{ij} x_i .$$

14. Ritorniamo alla condizione (21), che possiamo prendere ora sotto la forma (7), ed appliciamola alla funzione x :

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{C}_{ji} \right) (-\mathcal{C}_j x_j + T_i x_k + T_k x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{C}_{ij} \right) (-\mathcal{C}_i x_i + T_k x_j + T_j x_k) .$$

Mediante le condizioni d'immobilità questa eguaglianza si riduce ad una relazione lineare fra le x , che per l'arbitrarietà di queste variabili dà origine ai seguenti gruppi di formole:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial s_2} - \frac{\partial T_3}{\partial s_3} + T_2 \mathcal{G}_{22} - T_3 \mathcal{G}_{33} &= T_1 (\mathcal{G}_{21} - \mathcal{G}_{31}) \\ \frac{\partial T_3}{\partial s_3} - \frac{\partial T_1}{\partial s_1} + T_3 \mathcal{G}_{13} - T_1 \mathcal{G}_{31} &= T_2 (\mathcal{G}_{32} - \mathcal{G}_{12}) \\ \frac{\partial T_1}{\partial s_1} - \frac{\partial T_2}{\partial s_2} + T_1 \mathcal{G}_{21} - T_2 \mathcal{G}_{12} &= T_3 (\mathcal{G}_{13} - \mathcal{G}_{23}) \end{aligned} \right. \\
 (\beta) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial s_2} + \frac{\partial T_1}{\partial s_3} + 2T_1 \mathcal{G}_{23} + T_3 \mathcal{G}_{31} &= (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3) \mathcal{G}_{32} \\ \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial s_3} + \frac{\partial T_2}{\partial s_1} + 2T_2 \mathcal{G}_{31} + T_1 \mathcal{G}_{13} &= (\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_1) \mathcal{G}_{13} \\ \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial s_1} + \frac{\partial T_3}{\partial s_2} + 2T_3 \mathcal{G}_{12} + T_2 \mathcal{G}_{23} &= (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) \mathcal{G}_{21} \end{aligned} \right. \\
 (\beta') \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial s_3} + \frac{\partial T_1}{\partial s_2} + 2T_1 \mathcal{G}_{22} + T_2 \mathcal{G}_{21} &= (\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_2) \mathcal{G}_{23} \\ \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial s_1} + \frac{\partial T_2}{\partial s_3} + 2T_2 \mathcal{G}_{13} + T_3 \mathcal{G}_{32} &= (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3) \mathcal{G}_{31} \\ \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial T_3}{\partial s_1} + 2T_3 \mathcal{G}_{31} + T_1 \mathcal{G}_{13} &= (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \mathcal{G}_{12} \end{aligned} \right. .
 \end{aligned}$$

Similmente, se si applica la condizione (7) alla variabile x_i , si ottengono le formole seguenti:

$$\begin{aligned}
 (\gamma) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_{22}}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{33}}{\partial s_3} + \mathcal{G}_{22}^2 + \mathcal{G}_{33}^2 + \mathcal{G}_{21} \mathcal{G}_{31} &= -K_{11} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{13}}{\partial s_3} + \frac{\partial \mathcal{G}_{31}}{\partial s_1} + \mathcal{G}_{13}^2 + \mathcal{G}_{31}^2 + \mathcal{G}_{23} \mathcal{G}_{12} &= -K_{22} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{21}}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{12}}{\partial s_2} + \mathcal{G}_{21}^2 + \mathcal{G}_{12}^2 + \mathcal{G}_{13} \mathcal{G}_{23} &= -K_{33} \end{aligned} \right. \\
 (\delta) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_{13}}{\partial s_2} + (\mathcal{G}_{13} - \mathcal{G}_{23}) \mathcal{G}_{12} &= \frac{\partial \mathcal{G}_{12}}{\partial s_3} + (\mathcal{G}_{12} - \mathcal{G}_{32}) \mathcal{G}_{13} = K_{23} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{21}}{\partial s_3} + (\mathcal{G}_{21} - \mathcal{G}_{31}) \mathcal{G}_{23} &= \frac{\partial \mathcal{G}_{23}}{\partial s_1} + (\mathcal{G}_{23} - \mathcal{G}_{13}) \mathcal{G}_{21} = K_{31} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{32}}{\partial s_1} + (\mathcal{G}_{32} - \mathcal{G}_{12}) \mathcal{G}_{31} &= \frac{\partial \mathcal{G}_{31}}{\partial s_2} + (\mathcal{G}_{31} - \mathcal{G}_{21}) \mathcal{G}_{32} = K_{12} . \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Qui si noti che, mercè le (γ) e (δ), la curvatura totale si può esprimere nelle

sole \mathcal{Q} , perchè si ha

$$K^2 = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix},$$

cioè, ricordando l'osservazione fatta in fine del § 3, K è funzione soltanto delle Q e delle loro derivate parziali prime e seconde. Quando poi si applica la condizione (7) a qualunque altra x , si ricade sulle formole già ottenute. Intanto le formole (α) si riducono a due sole distinte, e le (δ) costituiscono, in sostanza, una terna sola, in virtù dell'identità (8). Si hanno dunque in tutto *quattordici* formole, che per lo studio degli spazii curvi a tre dimensioni, immersi in uno spazio lineare a quattro dimensioni, prendono il posto tenuto dalle *tre* formole di Codazzi nello studio delle superficie.

15. Consideriamo, per esempio, uno *spazio sferico*, cioè il luogo dei punti che in uno spazio lineare a quattro dimensioni distano egualmente da un punto fisso. Le coordinate di questo punto debbono costantemente soddisfare alla relazione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x^2 = R^2$$

ed alle condizioni d'immobilità. Ne segue, differenziando successivamente la relazione stessa rispetto ai tre archi coordinati, che si ha $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e conseguentemente $x = R$. Portando questi risultati nelle condizioni d'immobilità si trova che dev'essere

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \frac{1}{R}, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 0;$$

poi si vede che le formole (α), (β) e (β') sono identicamente soddisfatte, dimodochè restano soltanto le condizioni (γ) e (δ), nelle quali

$$K_{11} = K_{22} = K_{33} = \frac{1}{R^2}, \quad K_{23} = K_{31} = K_{12} = 0. \quad (23)$$

Le sei relazioni così ottenute caratterizzano dunque gli spazii sferici. Esse sono dovute a Beltrami, e diventano, per R crescente all'infinito, le sei relazioni di Lamé (*form.* 9) caratteristiche dello spazio lineare. Naturalmente in uno spazio sferico non è possibile impiantare il sistema delle coordinate cartesiane, ma vi si può sempre stabilire un sistema di coordinate curvilinee, in cui la terna di funzioni Q si riduce, come nel sistema cartesiano, ad una funzione unica Q . Affinchè ciò avvenga occorre e basta che siano soddisfatte le condizioni (23) quando per le K si pongono i valori ricavati dalle formole (γ) e (δ), cioè

$$K_{ii} = -\frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial q_i^2} + \frac{1}{Q^2} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(Q \frac{\partial Q}{\partial q_i} \right), \quad K_{ij} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Un facile calcolo d'integrazione conduce a prendere

$$\frac{1}{Q} = 1 + \frac{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}{4R^2},$$

e si giunge così ad un sistema di coordinate, in cui l'arco elementare è dato dalla formola

$$ds^2 = \frac{dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2}{\left(1 + \frac{1}{4R^2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\right)^2}.$$

È questo il sistema delle *coordinate stereografiche*, segnalato da Riemann ed utilizzato da Beltrami per lo studio degli spazii a curvatura costante.

XVI. CURVE NEGLI IPERSPAZII.

1. Lungo una curva, o semplice infinità continua di punti in uno spazio lineare ad n dimensioni, consideriamo, a partire da M , le successive posizioni M', M'', \dots d'un punto, infinitamente prossime alla posizione iniziale M , arbitraria. Diremo, come nel § 10 del capitolo precedente, che l'elemento MM' determina la *tangente*, e questa assumeremo costantemente come asse x_1 . Prenderemo poi come asse x_2 la $(n-1)$ -normale, cioè la retta condotta per M perpendicolarmente ad $n-1$ elementi consecutivi MM', MM'', \dots . Evidentemente questa retta sta nel piano determinato da tutte le perpendicolari condotte per M ad $n-2$ elementi consecutivi, fra le quali sceglieremo come asse x_3 quella che, perpendicolare alla $(n-1)$ -normale, si può ben chiamare la $(n-2)$ -normale principale. Gli assi x_2 ed x_3 con tutte le $(n-3)$ -normali stanno in uno spazio lineare a tre dimensioni, nel quale conviene prendere l'asse x_4 perpendicolare al piano x_2, x_3 . Proseguendo sempre allo stesso modo si arriva a scegliere come asse x_{n-1} la *binormale principale*, determinata nello spazio lineare binormale (ad $n-2$ dimensioni) dall'obbligo della perpendicolarità agli assi precedenti. Finalmente nello spazio lineare normale (ad $n-1$ dimensioni), che racchiude tutte le normali, si distingue fra queste e si scelga come asse x_n la *normale principale*, perpendicolare allo spazio binormale. Siano $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}$ i coseni direttori dell'asse x_1 rispetto ad un sistema qualunque di n assi, perpendicolari fra loro due a due, e si noti che la definizione data del detto asse si traduce nelle relazioni

$$\sum_{v=1}^{v=n} \alpha_{1v} d^j \alpha_{1v} = 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq n-1 \quad (1)$$

$$\sum_{v=1}^{v=n} \alpha_{1v} \alpha_{jv} = 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq i-1 \quad (2)$$

In particolare dalle (1), per $j=1$, e dall'eguaglianza

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 + \dots + \alpha_{in}^2 = 1 \quad (3)$$

differenziata, si ha

$$\sum_{v=1}^{v=n} \alpha_{iv} d\alpha_{iv} = 0 \quad \text{per } 1 \leq i \leq n-1. \quad (4)$$

Intanto le relazioni (2) e (3) ci dicono che il determinante definito dall'elemento generale α_{ij} è ortogonale: il suo valore è, se si vuole, uguale all'unità, e ciascun elemento è uguale al proprio complemento algebrico. Dopo ciò dalle (4) si ricava, per tutti i valori di v ,

$$d\alpha_{iv} = \varepsilon_i \alpha_{nv} \quad (5)$$

rappresentando con ε_i l'angolo di due tangenti infinitamente vicine. Più generalmente, se si pone

$$\sum_{v=1}^{v=n} \alpha_{jv} d\alpha_{iv} = \varepsilon_{ij},$$

dimodochè

$$\varepsilon_{ii} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}, \quad (6)$$

si ha

$$d\alpha_{ij} = \sum_{v=1}^{v=n} \varepsilon_{iv} \alpha_{vj}. \quad (7)$$

Si ricade sulla (5) per $i=1$ ed

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \dots = \varepsilon_{1,n-1} = 0, \quad \varepsilon_{1n} = \varepsilon_1, \quad (8)$$

d'onde risulta, in virtù di (6),

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \dots = \varepsilon_{n-1,1} = 0, \quad \varepsilon_{n1} = -\varepsilon_1. \quad (9)$$

2. Mercè le (7) si riesce ad esprimere i differenziali successivi dei coseni direttori in funzione lineare dei coseni stessi. Se, partendo dall'angolo ε_{ij} , rappresentato provvisoriamente con $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, si calcola una successione di quantità $\varepsilon_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(3)}, \dots$ secondo la legge

$$\varepsilon_{ij}^{(k+1)} = d\varepsilon_{ij}^{(k)} + \sum_{v=1}^{v=n} \varepsilon_{iv}^{(k)} \varepsilon_{vj}, \quad (10)$$

si trova, per successive differenziazioni della (7), ed impiegando ripetutamente questa formola,

$$d^k \alpha_{ij} = \sum_{v=1}^{v=n} \varepsilon_{iv}^{(k)} \alpha_{vj}.$$

Ora le (1) diventano

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{it}^{(k)} \alpha_{vj} \alpha_{ij} = 0,$$

vale a dire, osservando (3) e (4),

$$\varepsilon_{i_v}^{(k)} = 0 \quad \text{per } 2 \leq v \leq n - k .$$

Se si fa successivamente $k=1, 2, 3, \dots$, e se si porta in (10) l'ultimo risultato, si ottiene

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k}^n \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \varepsilon_{i_3} \dots \varepsilon_{i_k} = 0 \quad \text{per } 2 \leq v \leq n - k - 1 . \quad (11)$$

Se, per esempio, si pone $k=1$, si trova

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_{i_i} \varepsilon_{i_v} = 0 ,$$

cioè, in virtù di (8),

$$\varepsilon_{n_v} = 0 \quad \text{per } 2 \leq v \leq n - 2 .$$

Similmente per $k=2$ la relazione (11) diventa

$$\sum_{i, j}^n \varepsilon_{i_i} \varepsilon_{i_j} \varepsilon_{j_v} = 0 ,$$

e da questa, tenendo conto del risultato precedente, si trae

$$\varepsilon_{n-1, v} = 0 \quad \text{per } 2 \leq v \leq n - 3 .$$

Così proseguendo si prevede che in generale si avrà

$$\varepsilon_{n-k+1, v} = 0 \quad \text{per } 2 \leq v \leq n - k - 1 . \quad (12)$$

Supponiamo che questa uguaglianza sia vera, insieme a quelle che la precedono, e dimostriamo che sussiste quando vi si cambia k in $k+1$. Posto $i_{k+1}=j$, la relazione (11) dà

$$\sum_{j=1}^{j=n} (\varepsilon_{j_v} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \varepsilon_{i_3} \dots \varepsilon_{i_k}) = 0 \quad \text{per } 2 \leq v \leq n - k - 2 .$$

La somma con k indici è nulla per $j=2, 3, 4, \dots, n-k-1$. D'altra parte, in virtù di (12) e delle uguaglianze precedenti, ε_{j_v} è nullo per $j=n-k+1, n-k+2, \dots, n-1, n$. Restano dunque soltanto i termini che corrispondono ai valori $j=1$ e $j=n-k$: il primo è nullo in virtù di (8), e però si ha

$$\varepsilon_{n-k, v} = 0 \quad \text{per } 2 \leq v \leq n - k - 2 ,$$

si cade cioè sulla stessa (12), in cui k si trova cambiato in $k+1$.

3. Ora prendiamo come assi le n rette principali, e consideriamo le posizioni che queste vanno ad occupare quando l'origine M si trasferisce in M' . È chiaro che ε_{ij} rappresenta, per $i \leq j$, il coseno dell'angolo che il nuovo asse x'_i fa con x_i . Con ciò le formole (12) ricevono un'interpretazione geometrica, che si potrebbe facilmente utilizzare per la dimostrazione diretta delle for-

mole stesse. Intanto, se poniamo

$$\varepsilon_{2,n} = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{3,n-1} = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_{4,n-2} = \varepsilon_4, \quad \dots, \quad \varepsilon_{n-1,3} = \varepsilon_{n-1},$$

le formole (12), (8) e (9) ci dicono che i coseni direttori delle rette principali che hanno l'origine in M' , rispetto a quelle uscenti da M , sono dati dal seguente quadro:

	x_1	x_2	x_3	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
x'_1	1	0	0	0	0	ε_1
x'_2	0	1	ε_{n-1}	0	0	0
x'_3	0	$-\varepsilon_{n-1}$	1	0	0	0
...
x'_{n-2}	0	0	0	1	ε_2	0
x'_{n-1}	0	0	0	$-\varepsilon_2$	1	ε_2
x'_n	$-\varepsilon_1$	0	0	0	$-\varepsilon_2$	1

Ciò premesso, siano x_1, x_2, \dots, x_n le coordinate d'un punto P rispetto agli assi mobili; sia δx la variazione assoluta d'una coordinata x nello spazio, quando M passa in M' e simultaneamente P in P' ; sia dx la variazione che la stessa coordinata può subire rispetto agli assi mobili. Proiettando $M'P$ sugli assi uscenti da M si ottiene

$$\delta x_1 = dx_1 - \varepsilon_1(x_n + dx_n) + ds, \quad \delta x_2 = dx_2 - \varepsilon_{n-1}(x_3 + dx_3), \quad \text{ecc.}$$

ovvero

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta x_1}{ds} &= \frac{dx_1}{ds} - \frac{x_n}{\rho_1} + 1, & \frac{\delta x_2}{ds} &= \frac{dx_2}{ds} - \frac{x_3}{\rho_{n-1}}, & \frac{\delta x_n}{ds} &= \frac{dx_n}{ds} + \frac{x_1}{\rho_1} + \frac{x_{n-1}}{\rho_2}, \\ \frac{\delta x_i}{ds} &= \frac{dx_i}{ds} + \frac{x_{i-1}}{\rho_{n-i+2}} - \frac{x_{i+1}}{\rho_{n-i+1}} \quad (i=3, 4, \dots, n-1), \end{aligned} \right. \quad (13)$$

dopo aver posto

$$ds = \varepsilon_1 \rho_1 = \varepsilon_2 \rho_2 = \varepsilon_3 \rho_3 = \dots = \varepsilon_{n-1} \rho_{n-1}. \quad (14)$$

4. Le (13) sono le *formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle curve* contenute in uno spazio lineare ad n dimensioni. Queste curve sono dunque suscettibili di $n-1$ *curvature*, che si possono misurare mediante i *raggi* ρ . Quando, nel percorrere la curva, il punto M si allontana dalla tangente, si produce la prima curvatura. Per la tendenza più o meno grande di M ad allontanarsi dal piano osculatore si ha una seconda curvatura, poi una terza, dovuta alla tendenza che ha M ad uscire dallo spazio osculatore determinato da tre elementi consecutivi $MM', M'M'', M''M'''$, e così di seguito, finchè per l'allontanamento di M dallo spazio osculatore (lineare, ad $n-1$ dimensioni) perpendicolare alla $(n-1)$ -normale, la linea subisce una $(n-1)^{esima}$ ed ultima curvatura. Le formole (13) valgono anche quando per

le x si pongono i coseni che definiscono una direzione qualunque, purchè dalla prima si tolga il termine 1. In particolare, quando le dette formole si applicano all'asse x_{n-i+1} , si trova facilmente che l'angolo e_i di due i -normali infinitamente vicine è dato dalla formola

$$e_i^2 = \varepsilon_i^2 + \varepsilon_{i+1}^2,$$

vera anche per $i = n - 1$ se si conviene che sia $\varepsilon_n = 0$, come si deve supporre se per poco lo spazio considerato si pensa come immerso in uno spazio lineare con una dimensione di più. Se inoltre si chiama e_0 l'angolo ($= \varepsilon_1$) di due tangenti infinitamente vicine, è interessante notare il seguente *teorema di Lancret*:

$$e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - \dots \pm e_{n-1}^2 = 0.$$

5. La dimostrazione delle formole (13) può essere agevolata da semplicissime considerazioni meccaniche, che hanno il vantaggio di mostrare quale sia la via da seguire per ottenere formole analoghe, più generali, riferentisi a spazii non lineari. Quando nello spazio ad n dimensioni, in cui è

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2,$$

alle coordinate x si attribuiscono variazioni arbitrarie δx , l'ultima relazione dà

$$ds \delta ds = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta x_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j,$$

e di qui si deduce che le condizioni

$$\frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta x_j}{\partial x_i} = 0$$

sono *necessarie* e, tutte insieme, *sufficienti per la rigidità*. Quindi, integrando,

$$\delta x_i = a_i + \omega_{i1} x_1 + \omega_{i2} x_2 + \dots + \omega_{in} x_n,$$

dove $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$. Adunque ogni moto rigido infinitesimo risulta da una *traslazione* (a_1, a_2, \dots, a_n) e da una *rotazione*, scomponentesi in $\frac{1}{2} n(n-1)$ rotazioni parallele ai piani coordinati, in modo che, per ciascuna rotazione componente, ogni punto del sistema si muove in un piano parallelo ad un piano coordinato, ed in esso subisce una rotazione ω_{ij} , computata da x_j verso x_i . Ciò premesso, il sistema delle n rette principali si consideri come rigido, e se ne studii il passaggio dalla posizione che occupa in un punto M a quella che prende in un punto infinitamente prossimo M' . La $(n-i+1)$ -normale principale x_i rimane perpendicolare ad $n-i$ elementi consecutivi, e però deve muoversi nello spazio normale, ad i dimensioni, $x_2 x_3 \dots x_i x_{i+1}$, cui son perpendicolari i rimanenti assi $x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_n$. Ne segue $\omega_{ij} = 0$ per

$$i > 1, \quad j = i+2, i+3, \dots, n.$$

Osservando poi che $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ si può aggiungere che $\omega_{ij} = 0$ per

$$j > 1 \quad , \quad i = j + 2 \quad , \quad j + 3 \quad , \quad \dots \quad , \quad n \quad .$$

Quindi, riassumendo, è $\omega_{ij} = 0$ per

$$i > 1 \quad , \quad j = 2, 3, \dots, i - 3, i - 2, i, i + 2, i + 3, \dots, n - 1, n \quad .$$

Quanto ad x_1 è chiaro che, dovendo rimanere perpendicolare a tutte le plurinormali, non può uscire dal piano osculatore $x_1 x_n$: sia ε_1 l'angolo di cui ruota verso x_n . Si ha

$$\omega_{n1} = \varepsilon_1 \quad , \quad \omega_{21} = \omega_{31} = \dots = \omega_{n-1,1} = 0 \quad ,$$

$$\omega_{1n} = -\varepsilon_1 \quad , \quad \omega_{12} = \omega_{13} = \dots = \omega_{1,n-1} = 0 \quad .$$

Ed ora siano $\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \dots, \varepsilon_2$ gli angoli di cui ruotano x_2, x_3, \dots, x_{n-1} verso x_3, x_4, \dots, x_n , rispettivamente, dimodochè

$$\omega_{i+1,i} = -\omega_{i,i+1} = \varepsilon_{n-i+1} \quad .$$

Il sistema rigido individuato dalle n rette principali subisce dunque, nel passaggio da M ad M' , oltre alla traslazione ds lungo x_1 , la rotazione definita dagli angoli ω testè determinati. Quando il punto (x_1, x_2, \dots, x_n) , invece di essere invariabilmente legato alle n rette, subisce rispetto ad esse lo spostamento $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, le componenti del suo spostamento assoluto nello spazio sono, in virtù delle formole dimostrate in principio e degli ultimi risultati ottenuti,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x_1 = dx_1 - \varepsilon_1 x_n + ds \quad , \quad \delta x_2 = dx_2 - \varepsilon_{n-1} x_3 \quad , \quad \delta x_n = dx_n + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_{n-1} \quad , \\ \delta x_i = dx_i + \varepsilon_{n-i+2} x_{i-1} - \varepsilon_{n-i+1} x_{i+1} \quad (i = 3, 4, \dots, n-1) \quad . \end{array} \right.$$

Ora queste, divise per le (14), sono appunto le formole fondamentali.

6. Passiamo a far vedere come si estendano facilmente agli spazi lineari con più di due dimensioni i principii dell'analisi baricentrica (VII, 1). In uno spazio lineare ad n dimensioni fissiamo i punti A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , che si possono considerare come vertici del più semplice ente poliedrico ad n dimensioni, al quale, seguendo Stringham, daremo il nome di $(n+1)$ -edroide n -uplo. Siano $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ le coordinate di A_i rispetto agli assi mobili. Un punto qualunque M si può sempre supporre definito nello spazio come baricentro d'un certo sistema di $n+1$ masse (*coordinate baricentriche*), applicate ai vertici dell' $(n+1)$ -edroide fondamentale, e soddisfacenti alla relazione

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_{n+1} = 1 \quad ,$$

dimodochè le sue coordinate cartesiane, relative ad un sistema qualunque di assi ortogonali, sono date dalla formola

$$x_k = \mu_1 x_{1k} + \mu_2 x_{2k} + \dots + \mu_{n+1} x_{n+1,k} \quad .$$

Intanto si ha identicamente

$$\sum_{i,j}^{n+1} (x_{ik} - x_{jk})^2 d\mu_i d\mu_j = 2 \sum_{i=1}^{n+1} d\mu_i \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x_{ik}^2 d\mu_i - 2 \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{ik} d\mu_i \right)^2.$$

Il secondo membro si riduce, in virtù delle precedenti uguaglianze, a $-2dx_k^2$, e però, se si fa $k=1, 2, 3, \dots, n$, si ottiene, sommando,

$$ds^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n+1} a_{ij}^2 d\mu_i d\mu_j,$$

dove a_{ij} rappresenta la lunghezza del lato $A_i A_j$, vale a dire che si è posto

$$a_{ij}^2 = (x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2 + \dots + (x_{in} - x_{jn})^2.$$

Se, per esempio, le coordinate μ sono date in funzione d'un parametro t , che, se si vuole, rappresenta il tempo, la formola precedente ci darà subito la espressione del quadrato della velocità:

$$x^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n+1} a_{ij}^2 \frac{d\mu_i}{dt} \frac{d\mu_j}{dt}. \quad (15)$$

7. Consideriamo il determinante wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \mu_1 & \frac{d\mu_1}{ds} & \frac{d^2\mu_1}{ds^2} & \dots & \frac{d^n\mu_1}{ds^n} \\ \mu_2 & \frac{d\mu_2}{ds} & \frac{d^2\mu_2}{ds^2} & \dots & \frac{d^n\mu_2}{ds^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n+1} & \frac{d\mu_{n+1}}{ds} & \frac{d^2\mu_{n+1}}{ds^2} & \dots & \frac{d^n\mu_{n+1}}{ds^n} \end{vmatrix},$$

e moltiplichiamolo per la costante

$$a^n = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \dots & x_{n+1,n} \end{vmatrix},$$

che si può far dipendere dalle sole a_{ij} , perchè si trova

$$(-2a^2)^n = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{11}^2 & a_{12}^2 & \dots & a_{1,n+1}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & a_{22}^2 & \dots & a_{2,n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n+1,1}^2 & a_{n+1,2}^2 & \dots & a_{n+1,n+1}^2 \end{vmatrix}$$

con facili trasformazioni, che non è necessario qui riprodurre, come è inutile

dimostrare che $a^n \cdot n!$ misura la capacità dell' $(n+1)$ -edroide fondamentale. Intanto dall'accennata moltiplicazione risulta il valore di $a^n W$ sotto forma d'un determinante dell'ordine n^{imo} , il cui elemento generale è

$$\sigma_{ij} = \sum_1^{n+1} x_{kj} \frac{d^i \mu_k}{ds^i}.$$

Ciò premesso, applicando le formole fondamentali ai punti A, si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_{i1}}{ds} = \frac{x_{in} - 1}{\rho_1}, \quad \frac{dx_{i2}}{ds} = \frac{x_{i2}}{\rho_{n-1}}, \quad \frac{dx_{in}}{ds} = -\left(\frac{x_{i1}}{\rho_1} + \frac{x_{i,n-1}}{\rho_2}\right), \\ \frac{dx_{ij}}{ds} = \frac{x_{i,j+1}}{\rho_{n-j+1}} - \frac{x_{i,j-1}}{\rho_{n-j+2}} \quad (j=3, 4, \dots, n-1) \end{array} \right.$$

e da queste risultano le altre

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{i+1,1} = \frac{d\sigma_{i1}}{ds} - \frac{\sigma_{in}}{\rho_1}, \quad \sigma_{i+1,2} = \frac{d\sigma_{i2}}{ds} - \frac{\sigma_{i3}}{\rho_{n-1}}, \quad \sigma_{i+1,n} = \frac{d\sigma_{in}}{ds} + \frac{\sigma_{i,n-1}}{\rho_2} + \frac{\sigma_{i1}}{\rho_1}, \\ \sigma_{i+1,j} = \frac{d\sigma_{ij}}{ds} + \frac{\sigma_{i,j-1}}{\rho_{n-j+2}} - \frac{\sigma_{i,j+1}}{\rho_{n-j+1}} \quad (j=3, 4, \dots, n-1) \end{array} \right. \quad (16)$$

per mezzo delle quali, conosciuta la prima colonna del determinante $a^n W$, si possono calcolare tutte le altre. Del resto una prima derivazione delle uguglianze di definizione

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \mu_i x_{ij} = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, n)$$

mostra che

$$\sigma_{11} = 1, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \dots = \sigma_{1n} = 0;$$

poi le (16) danno

$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \dots = \sigma_{2,n-1} = 0, \quad \sigma_{2,n} = \frac{1}{\rho_1};$$

quindi

$$\sigma_{31} = -\frac{1}{\rho_1^2}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{33} = \dots = \sigma_{3,n-2} = 0,$$

$$\sigma_{3,n-1} = -\frac{1}{\rho_1 \rho_2}, \quad \sigma_{3,n} = \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho_1};$$

ecc. Si prevede che dev'essere

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad 2 \leq j \leq n - i + 1. \quad (17)$$

Amnesso che ciò sia vero fino ad un certo valore dell'indice i , è facile dimostrare che sussiste quando si cambia i in $i+1$. Risulta infatti dalle formole (16) e (17) che

$$\sigma_{i+1,j} = -\frac{\sigma_{i,j+1}}{\rho_{n-j+1}} \quad \text{per} \quad 2 \leq j \leq n - i + 1, \quad (18)$$

dimodochè, osservando (17), si ha

$$\sigma_{i+1,j} = 0 \text{ per } 2 \leq j \leq n-1,$$

e questa è appunto la (17), in cui si è sostituito $i+1$ ad i . Dunque

$$a^n W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{31} & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{3,n-1} & \sigma_{3,n} \\ \sigma_{41} & 0 & 0 & \dots & \sigma_{4,n-2} & \sigma_{4,n-1} & \sigma_{4,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1,1} & 0 & \sigma_{n-1,2} & \dots & \sigma_{n-1,n-2} & \sigma_{n-1,n-1} & \sigma_{n-1,n} \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_{n,n-2} & \sigma_{n,n-1} & \sigma_{n,n} \end{vmatrix},$$

cioè

$$a^n W = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \cdot \sigma_{2,n} \sigma_{3,n-1} \sigma_{4,n-2} \dots \sigma_{n,2}. \quad (19)$$

D'altra parte la formola (18) dà, per $j = n - i + 1$,

$$\sigma_{i+1, n-i+1} = - \frac{\sigma_{i, n-i+2}}{\rho_i},$$

e da questa si deduce

$$\sigma_{i+1, n-i+1} = \frac{(-1)^{i-1}}{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_i}.$$

Portando finalmente in (19) questo risultato si giunge alla seguente notevole formola:

$$a^n \rho_1^{n-1} \rho_2^{n-2} \rho_3^{n-3} \dots \rho_{n-1} W = 1. \quad (20)$$

8. L'ultima formola ci dà sempre una relazione fra le $n - 1$ curvatures d'una data curva, e ne occorrono altre $n - 2$ per potere stabilire le equazioni intrinseche della curva stessa. È chiaro che la relazione (20) basta nel caso d'una curva piana: allora l'equazione intrinseca domandata si ottiene eliminando t fra le uguaglianze

$$a^2 \rho W = 1, \quad s = \int x dt,$$

nelle quali si sarà prima pensato a sostituire x e W in funzione di t mediante la formola (15) e l'altra

$$x^{\frac{1}{2}n(n+1)} W = \begin{vmatrix} \mu_1 & \frac{d\mu_1}{dt} & \frac{d^2\mu_1}{dt^2} & \dots & \frac{d^n\mu_1}{dt^n} \\ \mu_2 & \frac{d\mu_2}{dt} & \frac{d^2\mu_2}{dt^2} & \dots & \frac{d^n\mu_2}{dt^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \frac{d\mu_{n-1}}{dt} & \frac{d^2\mu_{n-1}}{dt^2} & \dots & \frac{d^n\mu_{n-1}}{dt^n} \end{vmatrix},$$

facile conseguenza della definizione di W . Per le linee dello spazio lineare a tre dimensioni si ottiene fra le due curvature la relazione

$$a^3 \rho^2 r W = 1, \quad (21)$$

e ne occorre un'altra. Per trovarla si consideri la matrice wronskiana

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \frac{d\mu_1}{ds} & \frac{d^2\mu_1}{ds^2} & \frac{d^3\mu_1}{ds^3} & \frac{d^4\mu_1}{ds^4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_4 & \frac{d\mu_4}{ds} & \frac{d^2\mu_4}{ds^2} & \frac{d^3\mu_4}{ds^3} & \frac{d^4\mu_4}{ds^4} \end{vmatrix} \quad (22)$$

che diventa W quando vi si sopprime l'ultima colonna, e $\frac{dW}{ds}$ quando si sopprime la penultima. Sia inoltre W' il determinante ottenuto sopprimendo invece la seconda colonna, determinante che si può facilmente calcolare in funzione di t , perchè si ha, in virtù d'una proprietà generale dei wronskiani,

$$\kappa^{10} W' = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{ds}{dt} & \frac{d^2s}{dt^2} & \frac{d^3s}{dt^3} & \frac{d^4s}{dt^4} \\ \mu_1 & \frac{d\mu_1}{dt} & \frac{d^2\mu_1}{dt^2} & \frac{d^3\mu_1}{dt^3} & \frac{d^4\mu_1}{dt^4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_4 & \frac{d\mu_4}{dt} & \frac{d^2\mu_4}{dt^2} & \frac{d^3\mu_4}{dt^3} & \frac{d^4\mu_4}{dt^4} \end{vmatrix}.$$

Affinchè coesistano le uguaglianze

$$\sum \mu_i x_{it} = 0, \quad \sum x_{it} \frac{d\mu_i}{ds} = 1, \quad \sum x_{it} \frac{d^2\mu_i}{ds^2} = 0,$$

$$\sum x_{it} \frac{d^3\mu_i}{ds^3} = -\frac{1}{\rho^3}, \quad \sum x_{it} \frac{d^4\mu_i}{ds^4} = \frac{3}{\rho^3} \frac{d\rho}{ds},$$

nelle quali i va da 1 a 4, bisogna che il determinante formato aggregando alla matrice (22) la linea

$$0, 1, 0, -\frac{1}{\rho^3}, \frac{3}{\rho^3} \frac{d\rho}{ds}$$

sia nullo, cioè che si abbia

$$\rho^3 W' = \frac{d}{ds} (\rho^3 W), \quad (23)$$

d'onde si trae

$$\frac{1}{\rho^3} = -\frac{2}{3} W^{\frac{2}{3}} \int W' W^{-\frac{5}{3}} \kappa dt, \quad (24)$$

purchè non sia nullo W o W' . Quando a κ, W, W' si sostituiscono le loro espressioni in funzione di t , l'ultima formola fa conoscere ρ , poi dalla (21) si ricava r . Del resto alla (24) si perviene anche con un procedimento ana-

logó a quello che ci ha fornito la (21). Moltiplicando infatti fra loro i determinanti a^3 e W' si ottiene

$$a^3 \rho^5 W' = \frac{d}{ds} \frac{\rho}{r} ,$$

e da questa formola si ricade sulla (23) eliminandone r per mezzo di (21). Inoltre si vedè che in $W' = 0$ sta la condizione necessaria e sufficiente perchè la curva sia un'elica, mentre $W = 0$ è la condizione perchè la curva sia piana. Il lettore potrà, come esercizio, applicare le formole precedenti allo studio della potenziale tetraedrica (cfr. VII, 20).

XVII. IPERSPAZII.

1. Consideriamo una linea d'uno spazio curvo ad n dimensioni, immerso in uno spazio lineare, e ricordiamo che, in virtù delle formole fondamentali stabilite nel capitolo precedente, le coordinate d'un punto fisso rispetto alle $n+1$ rette principali della curva sono tali funzioni dell'arco, che le loro derivate si esprimono linearmente nelle coordinate stesse. È chiaro che questa proprietà si conserva quando le n rette normali, rigidamente collegate, ruotano nel loro spazio finchè una di esse diventa normale allo spazio curvo considerato. Se in questo immaginiamo $n-1$ curve, tangenti alle altre $n-1$ rette, potremo scrivere, chiamando $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ le coordinate del punto fisso,

$$\frac{\partial x_i}{\partial s_j} = \sum_0^n A_{ik}^{(j)} x_k - e_{ij} , \quad (1)$$

dove e_{ij} è 1 o 0 secondo che $i=j$ o $i \neq j$. Fra breve si vedrà che gli $n(n+1)^2$ coefficienti A si riducono a soli $\frac{1}{2}n(3n-1)$ linearmente indipendenti, e che fra questi e le loro derivate sussistono $\frac{1}{2}n(n-1)(5n-1)$ relazioni sostanzialmente diverse, analoghe alle formole stabilite da Codazzi per le superficie.

2. **Teorema di Dupin.** Innanzi tutto si noti che le formole (1) sussistono, con e_{ij} sempre nullo, quando le x hanno il significato di coseni direttori, nel qual caso si deve avere identicamente

$$x_0 \frac{\partial x_0}{\partial s_k} + x_1 \frac{\partial x_1}{\partial s_k} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial s_k} + \dots + x_n \frac{\partial x_n}{\partial s_k} = 0 ;$$

quindi

$$A_{ij}^{(k)} + A_{ji}^{(k)} = 0 , \quad (2)$$

ed in particolare $A_{ii}^{(k)} = 0$. D'altra parte si ottiene, derivando (1),

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial s_i \partial s_j} = \sum_0^n \frac{\partial A_{ki}^{(i)}}{\partial s_j} x_i + \sum_{i,m} A_{ki}^{(i)} A_{im}^{(j)} x_m - A_{kj}^{(i)}, \quad (3)$$

poi, per $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$,

$$\frac{\partial x_i}{\partial s_j} = -e_{ij}, \quad \frac{\partial^2 x_k}{\partial s_i \partial s_j} = -A_{kj}^{(i)}.$$

Ciò premesso, la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial s_i \partial s_j} - \frac{\partial^2 x_k}{\partial s_j \partial s_i} = \frac{\partial \log Q_j}{\partial s_i} \frac{\partial x_k}{\partial s_j} - \frac{\partial \log Q_i}{\partial s_j} \frac{\partial x_k}{\partial s_i} \quad (4)$$

diventa

$$A_{ki}^{(j)} - A_{kj}^{(i)} = e_{ki} \frac{\partial \log Q_i}{\partial s_j} - e_{kj} \frac{\partial \log Q_j}{\partial s_i},$$

ed in particolare, per $k = i$,

$$A_{ij}^{(i)} = -\frac{\partial \log Q_i}{\partial s_j}. \quad (5)$$

Supponendo invece k diverso da i e da j si ottiene

$$A_{ki}^{(j)} = A_{kj}^{(i)}. \quad (6)$$

Finalmente le formole (2) e (6), adoperate alternativamente, danno

$$A_{ij}^{(k)} = -A_{ji}^{(k)} = -A_k^{(i)} = A_{kj}^{(i)} = A_{ki}^{(j)} = -A_{ik}^{(j)} = -A_{ij}^{(k)}.$$

Ne risulta

$$A_{ij}^{(k)} = 0 \quad (7)$$

sempre che i, j, k siano diversi fra loro e diversi da zero. Questa uguaglianza è l'espressione generalizzata del *teorema di Dupin* negli iperspazii, perchè si è visto precedentemente (XV, 12) che il detto teorema si deve appunto all'indipendenza dei quozienti $\frac{\partial x_i}{\partial s_j}$ dalle x con indice non nullo, diverso da i e da j ; e si vedrà fra breve che anche il significato geometrico dell'uguaglianza (7) è la naturale estensione di quello già trovato negli spazii a tre dimensioni.

3. Se si fa $k=0$, e se si pone $A_{ij}^{(i)} = \mathfrak{E}_{ij}$, si può soltanto asserire, in virtù di (6), che $\mathfrak{E}_{ij} = \mathfrak{E}_{ji}$. Noi rappresenteremo inoltre \mathfrak{E}_{ii} con $-\mathfrak{N}_i$, ed $A_{ij}^{(i)}$ con $-\mathfrak{G}_{ij}$, dimodochè si avrà, secondo la (5),

$$\mathfrak{G}_{ij} = \frac{\partial \log Q_i}{\partial s_j}. \quad (8)$$

Così dei coefficienti A restano soltanto quelli che sono stati indicati con $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \dots, 0, \mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_{21}, \mathfrak{G}_{13}, \mathfrak{G}_{31}, \mathfrak{G}_{23}, \mathfrak{G}_{32}, \dots, 0, \mathfrak{E}_{12}, \mathfrak{E}_{13}, \mathfrak{E}_{23}, \dots$

e che noi chiameremo rispettivamente *curvature normali*, *curvature geodetiche* e *torsioni geodetiche*. Adunque, riassumendo, non cessiamo di tener presente che ogni coefficiente A cambia segno quando se ne traspongono gli indici inferiori, e che le curvature normali, le torsioni e le curvature geodetiche si esprimono nel seguente modo :

$$\mathcal{N}_i = A_{i0}^{(i)} \quad , \quad \mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ji} = A_{0j}^{(i)} \quad , \quad \mathcal{G}_{ij} = A_{ji}^{(i)} .$$

In ogni altro caso $A=0$. Avvertiamo inoltre che talvolta lasceremo, per comodità di scrittura, $-\mathcal{T}_{ii}$ al posto di \mathcal{N}_i , e \mathcal{G}_{ii} invece di 0.

4. Formole di Codazzi. Ora, osservando (8), la condizione (4) si cambia in

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) \frac{\partial x_k}{\partial s_j} = \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) \frac{\partial x_k}{\partial s_i}$$

per trasformarsi poi, mercè le (3), in una relazione lineare fra le x , che si scinde nelle seguenti condizioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) A_{kl}^{(i)} - \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) A_{kl}^{(j)} = \sum_0^n (A_{km}^{(i)} A_{lm}^{(j)} - A_{km}^{(j)} A_{lm}^{(i)}) \quad , \quad (9)$$

necessarie e sufficienti per l'esistenza delle funzioni x . Quando ciascuno dei numeri i, j, k, l si suppone positivo e diverso dagli altri tre, il primo membro è nullo, in virtù di (7), e si ottiene

$$\mathcal{T}_{ik} \mathcal{T}_{jl} - \mathcal{T}_{il} \mathcal{T}_{jk} = 0 \quad . \quad (10)$$

Questa eguaglianza permette di esprimere $\frac{1}{2}n(n-3)$ coefficienti \mathcal{T} mediante gli altri n , e così il numero dei coefficienti A , ai quali si può arbitrariamente assegnare il valore in un punto, si trova ridotto ad $n(n+1)$ per $n > 2$. La (9) è, per così dire, la *formola universale di Codazzi*, dalla quale si deducono altri gruppi di formole, secondo il vario significato dei coefficienti A . Quando uno degli indici k, l si suppone nullo, e l'altro diverso da i e da j , la formola (9) dà

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{ik}}{\partial s_j} - \frac{\partial \mathcal{T}_{jk}}{\partial s_i} + \mathcal{T}_{ik} \mathcal{G}_{ij} - \mathcal{T}_{jk} \mathcal{G}_{ji} + \mathcal{T}_{ij} (\mathcal{G}_{ik} - \mathcal{G}_{jn}) = 0 \quad . \quad (\alpha)$$

Se invece l'indice non nullo si pone uguale ad i o ad j , si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{N}_j}{\partial s_i} + \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial s_j} + 2 \mathcal{T}_{ij} \mathcal{G}_{ij} + \sum_1^{i-1} \mathcal{T}_{ik} \mathcal{G}_{jk} + \sum_{i+1}^n \mathcal{T}_{ik} \mathcal{G}_{jk} = (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_j) \mathcal{G}_{ji} \quad . \quad (\beta)$$

Ora facciamo $k=i, l=j$. In questa ipotesi la formola (9) diventa

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \frac{\partial \mathcal{G}_{ji}}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ij}^2 + \mathcal{G}_{ji}^2 + \sum_1^n \mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk} = \mathcal{T}_{ij}^2 - \mathcal{N}_i \mathcal{N}_j \quad . \quad (\gamma)$$

Se finalmente supponiamo che uno solo dei numeri positivi k, l sia uguale

ad i o ad j , troviamo

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{jk}}{\partial s_j} + (\mathcal{G}_{ik} - \mathcal{G}_{jk}) \mathcal{G}_{ij} = \mathcal{C}_i \mathcal{E}_{jk} + \mathcal{E}_{ik} \mathcal{E}_{ji} \quad (\delta)$$

ed anche

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_k} + (\mathcal{G}_{ij} - \mathcal{G}_{kj}) \mathcal{G}_{ik} = \mathcal{C}_i \mathcal{E}_{jk} + \mathcal{E}_{ik} \mathcal{E}_{ji} ;$$

ma quest' ultima formola non differisce dalla precedente, perchè (cfr. XV, 3) vi è identità, in virtù di (8), fra i primi membri. Le formole del gruppo (8), come quelle del gruppo (α), si distribuiscono in $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ terne; ma ogni terna di (α) racchiude due sole formole sostanzialmente diverse. I gruppi (β) e (γ) contengono evidentemente $n(n-1)$ ed $\frac{1}{2} n(n-1)$ formole, dimodochè si hanno in tutto

$$\frac{5}{6} n(n-1)(n-2) + \frac{3}{2} n(n-1) = \frac{1}{6} n(n-1)(5n-1)$$

relazioni, analoghe alle formole di Codazzi, negli spazii curvi ad n dimensioni.

5. Fondamentale nello studio intrinseco di questi spazii è la forma quadratica

$$\Phi = \mathcal{C}_1 x_1^2 + \mathcal{C}_2 x_2^2 + \dots - 2 \mathcal{E}_{12} x_1 x_2 - \dots ,$$

alle cui derivate parziali prime sono proporzionali le derivate di x_0 , in virtù delle (1). Qui è utile osservare la forma semplicissima che queste relazioni assumono in seguito alla determinazione dei coefficienti A, fatta nel § 3. Si ha

$$\frac{\partial x_i}{\partial s_i} = \mathcal{C}_i x_0 - \sum_1^n \mathcal{G}_{ij} x_j - 1 \quad , \quad \frac{\partial x_j}{\partial s_i} = - \mathcal{E}_{ij} x_0 + \mathcal{G}_{ij} x_i .$$

La discussione di Φ conduce al *teorema di Eulero* ed alla nozione dei *sistemi di curvatura*, caratterizzati dalle condizioni $\mathcal{E} = 0$. Poi, se supponiamo scritte le condizioni d'immobilità in uno degli spazii ad $n-1$ dimensioni, appartenente al sistema definito nel dato spazio curvo da una funzione q_i , ci accorgiamo subito che le \mathcal{E}_{jk} relative al predetto spazio q_i non differiscono dai coefficienti $A_{ik}^{(j)}$, dimodochè, quando gli n spazii q_i vengono associati per costituire lo spazio curvo considerato, l'eguaglianza (7) ci dice che tutte le loro \mathcal{E} sono nulle, cioè *gli spazii stessi debbono necessariamente intersecarsi secondo i loro sistemi di curvatura*. Finalmente la discussione di Φ conduce anche a considerare n curvature principali, il cui prodotto K, uguale al discriminante di Φ , può servire a misurare la *curvatura totale*. Le formole (γ) e (δ), insieme alle (10), forniscono poi i valori di tutti i minori quadratici di K, e però si può dire che *la curvatura totale dipende unicamente dalle curvature geodetiche e dalle loro variazioni*. Ancora si noti che, nel caso d'uno spazio lineare, svanisce identicamente la funzione Φ , e le formole di Codazzi

si riducono (cfr. XV, 15) ad $\frac{1}{2}n(n-1)^2$ condizioni *necessarie e sufficienti per la linearità dello spazio ad n dimensioni*.

6. Applichiamo le formole precedenti allo studio delle *deformazioni infinitesime* degli iperspazii. Un punto M d'uno spazio curvo ad n dimensioni, immerso in uno spazio lineare con una dimensione di più, si sposti infinitamente poco in questo spazio: siano $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ le sue coordinate, nella nuova posizione M' , rispetto agli assi mobili, di origine M , scelti nel modo precedentemente descritto, e si ponga

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial s_j} - \sum_0^n A_{ik}^{(j)} u_k . \quad (11)$$

Le formole fondamentali mostrano subito che, quando M percorre il segmento infinitesimo ds_i sull'asse i , le coordinate del punto M' variano di

$$u_{0i} ds_i , \quad u_{1i} ds_i , \quad u_{2i} ds_i , \quad \dots , \quad (u_{ii} + 1) ds_i , \quad \dots , \quad u_{ni} ds_i ;$$

quindi, più generalmente, se il punto M si muove nella direzione definita dai coseni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nello spazio lineare tangente, descrivendo il segmento ds , le coordinate di M' subiscono le variazioni

$$\left(\alpha_i + \sum_1^n \alpha_j u_{ij} \right) ds , \quad (12)$$

e però, quadrando e sommando, si trova che il segmento percorso da M è $ds' = (1 + \Omega) ds$, dove, a prescindere da infinitesimi superiori, si ha

$$\Omega = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j u_{ij} .$$

In particolare le u_{ii} rappresentano gli allungamenti unitarii secondo gli assi, e la considerazione dell'elemento solido costruito sugli spigoli ds_1, ds_2, \dots, ds_n mostra che $u_{ij} + u_{ji}$ è lo scorrimento angolare mutuo degli assi i e j , e che la dilatazione solida unitaria è

$$\Theta = u_{11} + u_{22} + u_{33} + \dots + u_{nn} ,$$

cioè, in virtù di (11),

$$\Theta = \sum_1^n \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{C}_i \right) u_i - u_0 \sum_1^n \mathcal{C}_i , \quad (13)$$

dove \mathcal{C}_i rappresenta la somma di tutte le \mathcal{C}_j che hanno il secondo indice uguale ad i .

7. I coseni direttori della tangente alla traiettoria di M' si ottengono evidentemente moltiplicando per $1 - \Omega$ le quantità (12), divise per ds . Essi hanno dunque i valori

$$\alpha_i - \Omega \alpha_i + \sum_1^n \alpha_j u_{ij} . \quad (14)$$

All'incremento così subito da α_i si può intanto dar la forma

$$\sum_{j,k} \alpha_j \alpha_k (\alpha_k u_{ij} - \alpha_i u_{kj}) = \alpha_1 \omega_{i1} + \alpha_2 \omega_{i2} + \dots + \alpha_n \omega_{in} ,$$

ponendo

$$\omega_{ij} = \sum_1^n \alpha_k (\alpha_j u_{ik} - \alpha_i u_{jk}) ;$$

e, poichè $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$, si vede che la direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ subisce nello spazio lineare tangente la rotazione definita appunto (XVI, 5) dalla matrice emisimmetrica

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \omega_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix} .$$

In particolare gli assi i e j ruotano, nel loro piano, di $-u_{ji}$ ed u_{ij} , e si riconosce così, ancora una volta, che $u_{ij} + u_{ji}$ rappresenta lo scorrimento angolare mutuo degli assi stessi. Intanto, poichè Ω è generalmente riducibile a forma canonica in un modo solo, avviene in generale che un sol sistema ortogonale di assi si conserva ortogonale nella deformazione, dimodochè una coppia qualunque (i, j) di tali assi ruota rigidamente, nel proprio piano, di un angolo $u_{ij} = -u_{ji} = \frac{1}{2}(u_{ij} - u_{ji})$. Siccome poi la quantità $\mathfrak{S}_{ij} = u_{ij} - u_{ji}$ è invariante ortogonale della forma ω_{ij} , si vede facilmente che le \mathfrak{S}_{ij} rappresentano in ogni caso le doppie componenti della rotazione geodetica. Ed ora, per le (11), si ha

$$\mathfrak{S}_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) u_i - \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) u_j . \quad (15)$$

Qui si noti che, in virtù della condizione d'integrabilità

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial s_i} = \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) \frac{\partial}{\partial s_j} , \quad (16)$$

le \mathfrak{S} si annullano tutte nelle deformazioni potenziali dello spazio in sè, cioè quando lo spostamento è tangenziale ed ha per componenti i quozienti differenziali d'una funzione u rispetto agli assi tangenti. Allora dalle (13) si ha pure $\Theta = \Delta^2 u$, giacchè con questi nostri simboli la *formola di Lamé*, che serve ad esprimere il parametro differenziale secondo, si scrive (cfr. XV, 7) nel seguente modo:

$$\Delta^2 = \sum_1^n \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_i \right) \frac{\partial}{\partial s_i} .$$

8. Passiamo alla scelta degli assi nello spazio deformato. Come asse 0 prenderemo sempre la normale allo spazio stesso, e sceglieremo gli altri in posizioni infinitamente poco diverse da quelle che vanno ad occupare, in se-

guito alla deformazione, i primitivi assi tangenti. Così, per asse i ammetteremo provvisoriamente che sia lecito assumere la retta definita nel primitivo spazio lineare tangente dai coseni

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{per } j=i, \\ -u_{ji} & \text{per } j \geq i, \end{cases} \quad (17)$$

considerata nella posizione che occupa dopo la deformazione. Allora, osservando le espressioni (13), si trova che i coseni direttori dei nuovi assi tangenti sono dati dal quadro

$$\begin{array}{cccc} u_{01} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{02} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{0n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

e però i coseni direttori del nuovo asse normale sono

$$1 \quad -u_{01} \quad -u_{02} \quad \dots \quad -u_{0n}.$$

Ne segue che, nel passaggio dall'antico al nuovo sistema, le coordinate x subiscono le variazioni

$$Dx_i = -u_i + u_{0i}x_0 \quad (18)$$

per $i > 0$, e

$$Dx_0 = -u_0 - \sum_1^n u_{0i}x_i. \quad (19)$$

È poi facile esprimere i nuovi quozienti differenziali mercè gli antichi, poichè si ha manifestamente

$$\frac{\partial}{\partial s'_i} = (1 - \Omega) \sum_1^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial s_i},$$

ed in particolare, se si fa l'ipotesi (17), il primo membro diventa il simbolo del quoziente differenziale relativo al nuovo asse i , mentre il secondo membro si riduce a

$$(1 - u_{ii}) \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + u_{ii} \frac{\partial}{\partial s_i} - \sum_1^n u_{ji} \frac{\partial}{\partial s_j} \right).$$

Dunque

$$\frac{\partial}{\partial s'_i} = \frac{\partial}{\partial s_i} - \sum_1^n u_{ji} \frac{\partial}{\partial s_j},$$

e però le variazioni prodotte dalla deformazione nei primitivi quozienti differenziali son date dalla formola

$$D \frac{\partial}{\partial s'_i} = \frac{\partial}{\partial s_i} D - \sum_1^n u_{ji} \frac{\partial}{\partial s_j}. \quad (20)$$

9. Ciò premesso, per calcolare le variazioni che le curvature subiscono in seguito alla deformazione, basterà applicare l'ultima formola alle relazioni (1). Si otterrà subito

$$\sum_0^n (A_{ik}^{(j)} D x_k + x_k D A_{ik}^{(j)}) = \frac{\partial}{\partial s_j} D x_i - \sum_1^n u_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial s_k};$$

quindi, supponendo $i > 0$ ed invocando le formole (18) e (19),

$$\begin{aligned} \sum_0^n x_k D A_{ik}^{(j)} &= \left[\frac{\partial u_{oi}}{\partial s_j} + \sum_0^n (A_{oi}^{(k)} u_{kj} - A_{ik}^{(j)} u_{ok}) \right] x_0 \\ &+ \sum_1^n (A_{ok}^{(j)} u_{oi} - A_{oi}^{(j)} u_{ok} - \sum_1^n A_{ik}^{(i)} u_{ij}) x_k. \end{aligned} \quad (21)$$

Ne segue, eguagliando fra loro i coefficienti di x_0 , e supponendo inoltre $i=j$,

$$D \mathfrak{N}_{\mathcal{O}_i} = \frac{\partial u_{oi}}{\partial s_i} + \sum_1^n (\mathcal{G}_{ij} u_{oj} + \mathfrak{E}_{ij} u_{ji}).$$

Invece per $i \geq j$ si ottiene

$$D \mathfrak{E}_{ij} = -\frac{\partial u_{oi}}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ji} u_{oj} - \sum_1^n \mathfrak{E}_{ki} u_{kj};$$

ma è chiaro che si deve potere scrivere anche

$$D \mathfrak{E}_{ij} = -\frac{\partial u_{oj}}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ij} u_{oi} - \sum_1^n \mathfrak{E}_{kj} u_{ki}.$$

Eguagliando poi fra loro i coefficienti di x_j si trova

$$D \mathcal{G}_{ij} = \mathcal{G}_{ji} u_{ji} - \mathcal{G}_{ij} u_{ii} - \mathfrak{E}_{ji} u_{oi} - \mathfrak{N}_{\mathcal{O}_i} u_{oj}.$$

10. L'identità fra le due espressioni trovate per $D \mathfrak{E}_{ij}$ si stabilisce direttamente applicando ad u_0 la condizione (16). Questa, applicata più generalmente ad u_k , dà

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) u_{ki} - \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) u_{kj} = \sum_0^n (A_{ki}^{(j)} u_{ii} - A_{ki}^{(i)} u_{ij}) \quad (22)$$

tenendo conto delle relazioni (9). Per $k=0$ si ottiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) u_{oi} - \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) u_{oj} = \sum_1^n (\mathfrak{E}_{kj} u_{ki} - \mathfrak{E}_{ki} u_{kj}).$$

Invece, per $k=i$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) u_{ii} - \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) u_{ij} = \mathcal{G}_{ji} u_{ji} - \mathfrak{E}_{ij} u_{oi} - \mathfrak{N}_{\mathcal{O}_i} u_{oj} + \sum_1^n \mathcal{G}_{ik} u_{kj}.$$

Finalmente, quando i, j, k si suppongono diversi fra loro e positivi, si tro-

vano le relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s_k} + \mathcal{G}_{jk} \right) u_{ij} - \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{kj} \right) u_{ik} &= \mathcal{G}_{ki} u_{kj} - \mathcal{G}_{ji} u_{jk} + \mathcal{E}_{ij} u_{ok} - \mathcal{E}_{ik} u_{oj} \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ki} \right) u_{jk} - \left(\frac{\partial}{\partial s_k} + \mathcal{G}_{ik} \right) u_{ji} &= \mathcal{G}_{ij} u_{ik} - \mathcal{G}_{kj} u_{ki} + \mathcal{E}_{jk} u_{oi} - \mathcal{E}_{ji} u_{ok} \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} \right) u_{ki} - \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) u_{kj} &= \mathcal{G}_{jh} u_{ji} - \mathcal{G}_{ih} u_{ij} + \mathcal{E}_{ki} u_{oj} - \mathcal{E}_{kj} u_{oi} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

11. Non sono intanto esaurite le conseguenze dell'identità (21), perchè bisogna ancora esprimere che i coefficienti nulli restano nulli, e si perviene così, per ogni terna i, j, k di numeri positivi differenti, alla terna di relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}_{kj} u_{ki} - \mathcal{G}_{jh} u_{ji} + \mathcal{E}_{ij} u_{ok} - \mathcal{E}_{ik} u_{oj} &= 0, \\ \mathcal{G}_{ih} u_{ij} - \mathcal{G}_{ki} u_{kj} + \mathcal{E}_{jk} u_{oi} - \mathcal{E}_{ji} u_{ok} &= 0, \\ \mathcal{G}_{ji} u_{jk} - \mathcal{G}_{ij} u_{ik} + \mathcal{E}_{ki} u_{oj} - \mathcal{E}_{kj} u_{oi} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Queste, che si possono considerare come le condizioni per la *permanenza del teorema di Dupin* nello spazio deformato, vincolano gli spostamenti mediante equazioni alle derivate parziali prime, e con ciò si viene a scoprire che *la deformazione fin qui studiata non è, per $n > 2$, la più generale possibile*. Le formole precedentemente stabilite valgono dunque, in tutta la loro generalità, *per le sole superficie*, ed è facile verificare che, per $n=2$, esse effettivamente si riducono a quelle che abbiamo dimostrate nel tredicesimo capitolo. La particolarizzazione constatata per $n > 2$ è avvenuta in seguito alla scelta degli assi, giacchè (cfr. XV, 4) *l'insieme di tutti gli assi tangenti dello spazio non sempre si può considerare come costituito dalle tangenti ad un sistema n -uplo ortogonale di curve*, ancorchè l'orientamento dei predetti assi varii in modo continuo insieme alla posizione dell'origine.

12. Altre condizioni restrittive potrebbero forse nascere dalla *permanenza della formola universale di Codazzi*; ma, poichè questa formola si è ottenuta applicando alle coordinate d'un punto fisso la condizione (16), basterà indagare se a qualche vincolo si debbano assoggettare gli spostamenti affinché la detta condizione sussista nello spazio deformato. Ora dalla (20) si deduce facilmente

$$D \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} = \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} D - \sum_1^n \frac{\partial u_{ki}}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_k} - \sum_1^n \left(u_{ki} \frac{\partial^2}{\partial s_k \partial s_j} + u_{kj} \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_k} \right);$$

quindi, se si scambia i con j , e si sottraggono poi l'una dall'altra le due uguaglianze, avendo riguardo alle relazioni (16), (22), (24), ed all'altra

$$\mathcal{G}_{ij} u_{ik} + \mathcal{G}_{jh} u_{ji} + \mathcal{G}_{ki} u_{kj} = \mathcal{G}_{ih} u_{ij} + \mathcal{G}_{ji} u_{jk} + \mathcal{G}_{kj} u_{ki},$$

conseguenza di ogni terna (24), si perviene ad un'identità. Non esistono

dunque, oltre le (24), altre restrizioni da imporre agli spostamenti. Alla medesima conclusione saremmo giunti meno rapidamente per via diretta, cioè calcolando le variazioni che la deformazione apporta nella formola codazziana; e per mettere in evidenza l'identità finale avremmo inoltre dovuto adoperare opportunamente l'integrazione per parti e qualche altro artificio.

13. Ed ora torniamo allo studio della deformazione generale. La matrice pseudosimmetrica

$$\begin{vmatrix} 1 & v_{10} & v_{20} & \dots & v_{n0} \\ v_{01} & 1 & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{0n} & v_{1n} & v_{2n} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

sia quella che definisce l'orientamento degli assi nello spazio deformato, rispetto agli assi primitivi. Se l'asse 0 si continua ad assumere normale allo spazio, sarà $v_{0i} = u_{0i}$, e le altre $\frac{1}{2}n(n-1)$ quantità infinitesime v dovranno soddisfare a condizioni tali, che valgano ad assicurare l'esistenza, nello spazio deformato, d'un n -uplo sistema ortogonale di curve, tangenti in ogni loro punto agli assi $1, 2, 3, \dots, n$. Lasciando per ora arbitrarie le v , le condizioni cercate sorgeranno spontanee dai calcoli che siamo per fare, e si noterà che son quelle stesse appunto, che assicurano la permanenza del teorema di Dupin nello spazio deformato. Prima osserviamo che la direzione definita dai coseni

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{per } j=i \\ -u_{ji} + v_{ji} & \text{per } j < i \end{cases}$$

è portata dalla deformazione a coincidere con quella del nuovo asse i . Infatti dalle espressioni (14) si vede che, per effetto della deformazione, i detti coseni acquistano i valori

$$(1 - u_{ii})\alpha_j + u_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{per } j=i \\ v_{ji} & \text{per } j < i \end{cases}$$

Dunque il nuovo quoziente differenziale, relativo all'asse i , si esprime nel seguente modo:

$$(1 - u_{ii}) \sum_1^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial s_j} = (1 - u_{ii}) \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + u_{ii} \frac{\partial}{\partial s_i} - \sum_1^n (u_{ji} - v_{ji}) \frac{\partial}{\partial s_j} \right).$$

Quindi alla (20) bisogna ora sostituire

$$D \frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial s_i} D - \sum_1^n (u_{ji} - v_{ji}) \frac{\partial}{\partial s_j}. \quad (25)$$

Similmente, invece di (18) e (19),

$$Dx_i = -u_i - \sum_0^n v_{ij} x_j.$$

14. Se, giovandosi delle formole precedenti, si fa variar tutto nelle condizioni d'immobilità, si ottiene una relazione lineare fra le coordinate x , che per l'arbitrarietà di queste si scinde e dà

$$DA_{ik}^{(j)} = -\frac{\partial v_{ik}}{\partial s_j} - \sum_1^n A_{ik}^{(i)}(u_{ij} - v_{ij}) - \sum_0^n (A_{ii}^{(j)}v_{ik} - A_{ik}^{(j)}v_{ii}) . \quad (26)$$

Ricordando che per ogni terna i, j, k di numeri positivi differenti si deve avere

$$A_{ik}^{(j)} = 0 \quad , \quad DA_{ik}^{(j)} = 0 \quad ,$$

si trovano le condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{jk}}{\partial s_i} + (\mathcal{G}_{ij} - \mathcal{G}_{kj})v_{ki} - (\mathcal{G}_{jk} - \mathcal{G}_{ik})v_{ij} \\ \quad + \mathcal{G}_{kj}u_{ki} - \mathcal{G}_{jk}u_{ji} + \mathcal{E}_{ij}u_{ok} - \mathcal{E}_{ik}u_{oj} = 0 \quad , \\ \frac{\partial v_{ki}}{\partial s_j} + (\mathcal{G}_{jk} - \mathcal{G}_{ik})v_{ij} - (\mathcal{G}_{ki} - \mathcal{G}_{ji})v_{jk} \\ \quad + \mathcal{G}_{ik}u_{ij} - \mathcal{G}_{ki}u_{kj} + \mathcal{E}_{jk}u_{oi} - \mathcal{E}_{ji}u_{ok} = 0 \quad , \\ \frac{\partial v_{ij}}{\partial s_k} + (\mathcal{G}_{ki} - \mathcal{G}_{ji})v_{jk} - (\mathcal{G}_{ij} - \mathcal{G}_{kj})v_{ki} \\ \quad + \mathcal{G}_{ji}u_{jk} - \mathcal{G}_{ij}u_{ik} + \mathcal{E}_{ki}u_{oj} - \mathcal{E}_{kj}u_{oi} = 0 \quad , \end{array} \right. \quad (27)$$

alle quali si può anche, in virtù delle (23), dar la forma notevolmente semplice

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial s_k} + \mathcal{G}_{jk} - \mathcal{G}_{ik}\right)(u_{ij} - v_{ij}) = \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{kj} - \mathcal{G}_{ij}\right)(u_{ik} - v_{ik}) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ki} - \mathcal{G}_{ji}\right)(u_{jk} - v_{jk}) = \left(\frac{\partial}{\partial s_k} + \mathcal{G}_{ik} - \mathcal{G}_{jk}\right)(u_{ji} - v_{ji}) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ij} - \mathcal{G}_{kj}\right)(u_{ki} - v_{ki}) = \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} - \mathcal{G}_{ki}\right)(u_{kj} - v_{kj}) . \end{array} \right. \quad (28)$$

Queste ultime sono notevoli anche perchè, grazie all'identità

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_k} + \mathcal{G}_{jk}\right)\mathcal{G}_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{kj}\right)\mathcal{G}_{ik} \quad ,$$

sono soddisfatte quando ad ogni $u_{ij} - v_{ij}$ si sostituisce \mathcal{G}_{ij} . Con calcoli alquanto prolissi, ma che non offrono difficoltà di sorta, si verifica poi che le (27) sono integrabili; e d'altra parte, giovandosi della formola

$$D \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} = \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} D - \sum_1^n \frac{\partial(u_{ki} - v_{ki})}{\partial s_j} \frac{\partial}{\partial s_k} \\ - \sum_1^n \left[(u_{ki} - v_{ki}) \frac{\partial^2}{\partial s_k \partial s_j} + (u_{kj} - v_{kj}) \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_k} \right] \quad ,$$

facile conseguenza della (25), si riconosce che la condizione d'integrabilità

(16), e conseguentemente la formola universale di Codazzi, sussistono nello spazio deformato, quando siano soddisfatte le (27): *a queste sole condizioni va dunque subordinata la scelta delle v*. Trovato un sistema qualunque di funzioni *v*, soddisfacenti alle (27), la formola (26) condurrà poi rapidamente alla conoscenza delle alterazioni prodotte dalla deformazione nelle varie curvatures:

$$D\mathcal{O}_i = \frac{\partial u_{oi}}{\partial s_i} + \sum_1^n (\mathcal{G}_{ij} u_{oj} + \mathcal{E}_{ij} u_{ji}) + 2 \sum_1^n \mathcal{E}_{ij} v_{ij} ,$$

$$D\mathcal{E}_{ij} = -\frac{\partial u_{oi}}{\partial s_j} + \mathcal{G}_{ji} u_{oj} - \sum_1^n \mathcal{E}_{ki} u_{kj} - \sum_1^n (\mathcal{E}_{ik} v_{jk} + \mathcal{E}_{jk} v_{ik})$$

$$D\mathcal{G}_{ij} = \mathcal{G}_{ji} u_{ji} - \mathcal{G}_{ij} u_{ii} - \mathcal{E}_{ij} u_{oi} - \mathcal{O}_i u_{oj} + \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) v_{ij} - \sum_1^n \mathcal{G}_{ik} v_{jk} .$$

Queste formole si possono in varie guise trasformare mercè le (22), ed è particolarmente notevole la seguente trasformazione dell'ultima:

$$D\mathcal{G}_{ij} = \frac{\partial u_{ii}}{\partial s_j} - \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ji} \right) (u_{ij} - v_{ij}) - \sum_1^n \mathcal{G}_{ik} (u_{kj} - v_{kj}) . \quad (29)$$

15. Teorema di Beez. Quando lo spazio si suppone *inestendibile*, dovendo allora essere identicamente nulla la forma Ω , le funzioni *u* godono, come le *v*, della proprietà $u_{ji} = -u_{ij}$, e conseguentemente, se $n > 2$, si può prendere $v = u$, perchè, soddisfatte le (28), le condizioni (27) si riducono necessariamente alle (23). Scelte in tal modo le *v*, si vede subito, per le cose dette nel § 13, che i nuovi assi si trovano nelle posizioni che gli antichi (arbitrarii) vanno ad occupare in seguito alla deformazione, e però al segno *D* si può (cfr. XIII, 6) sostituire \mathcal{O} . Adunque, come nelle deformazioni delle superficie inestendibili, ogni sistema ortogonale di assi resta ortogonale; ma, per $n > 2$, ciò non ha nulla di strano, perchè in realtà lo spazio *non si deforma*. Infatti dalla (29) si ha subito $\mathcal{O}\mathcal{G}_{ij} = 0$, vale a dire che le curvatures geodetiche non variano; ed allora, in virtù dei gruppi (γ) e (δ) delle formole di Codazzi, si vede, osservando (25), che rimangono inalterate anche le curvatures normali e le torsioni geodetiche, giacchè per ogni terna di valori attribuiti ad i, j, k , si conservano invariate sei funzioni, tra loro (in generale) indipendenti, delle sei curvatures $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j, \dots, \mathcal{E}_{ij}$, cioè $\mathcal{O}_i \mathcal{E}_{jk} + \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ik}, \mathcal{O}_j \mathcal{O}_k - \mathcal{E}_{jk}^2$, e le altre analoghe. Restano dunque inalterate *tutte* le curvatures, e si scopre così un fatto importante, segnalato da Beez, e messo poi in maggior evidenza da Ricci, cioè l'*impossibilità di deformare uno spazio inestendibile* a più di due dimensioni. Mentre un filo inestendibile si può flettere fino a dargli una forma arbitrariamente pre-stabilita, già si è visto (XI, 25) che una superficie inestendibile non può assumere, flettendosi, una forma qualunque, ed ora dal teorema di Beez apprendiamo che basta rendere inestendibile uno spazio a tre o più dimensioni

per determinarne la completa rigidità, vale a dire per impedirne qualunque cambiamento di forma; e così tutto avviene come se il crescente numero delle dimensioni tendesse a distruggere la flessibilità dello spazio. Inoltre l'analisi precedente ci rivela che l'impossibilità scoperta da Beez si deve in gran parte all'obbligo ($\mathcal{D}A_{ik}^{(n)}=0$) che lo spazio ha di deformarsi in guisa che gli spazii inferiori che lo costituiscono non cessino d'intersecarsi nel modo prescritto dal teorema di Dupin, come se da questo derivasse tale una rigidità nella struttura geometrica dello spazio, che non sia possibile provocarne una deformazione, senza che gli spazii costituenti si estendano o si contraggano. Eccezionalmente cessa tale rigidità quando, essendo nulli nel determinante K tutti i minori principali del terzo ordine, che racchiudono uno o due dati elementi principali, possono variare una o più curvature normali e torsioni geodetiche; e questa restituzione di flessibilità è proprio dovuta alla libertà maggiore con cui lo spazio, a motivo della parziale o totale indeterminazione dei suoi sistemi di curvatura, può soddisfare al teorema di Dupin.

16. Affinchè non resti alcun dubbio sulla precedente dimostrazione del teorema di Beez vogliamo ancora far vedere che, *quando non variano le curvature, lo spazio non fa che spostarsi rigidamente*. Assumiamo un sistema ortogonale di assi immobili: siano $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}$ i coseni direttori dell'asse i , ed x_0, x_1, \dots, x_n le coordinate dell'origine. Dal § 7 si rileva che, nell'ipotesi dell'instendibilità, le u_j sono appunto le componenti della *rotazione*, come le v_i sono le componenti della *traslazione*. Siano v_{ij} e v_i le analoghe quantità relative agli assi immobili, e per calcolarle osserviamo che le variazioni delle coordinate

$$\xi_i = -\sum \alpha_{ij} x_j$$

di M , rispetto agli assi immobili, hanno evidentemente i valori $\sum \alpha_{ij} u_j$, e d'altra parte si debbono potere esprimere mediante le v e le ξ nel seguente modo:

$$v_i + \sum v_{ij} \xi_j = \sum \alpha_{ij} u_j . \quad (30)$$

Basta scambiare fra loro i due sistemi di assi per vedere che si ha pure

$$u_i + \sum u_{ij} x_j = \sum \alpha_{ji} v_j ,$$

e per dedurne la prima delle formole

$$v_i = \sum \alpha_{ij} u_j + \sum \alpha_{ij} u_{jk} x_k , \quad v_{ij} = \sum \alpha_{ik} \alpha_{jl} u_{kl} : \quad (31)$$

alla seconda si perviene sostituendo v_i in (30) e paragonando fra loro i coefficienti di ξ_j , dopo avere osservato che

$$x_i = -\sum \alpha_{ji} \xi_j .$$

Ciò premesso, deriviamo la seconda formola (31) tenendo conto delle condizioni d'immobilità:

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial s_v} = \sum \alpha_{ik} \alpha_{jl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial s_v} + \sum (A_{km}^{(v)} \alpha_{im} \alpha_{jl} + A_{im}^{(v)} \alpha_{jm} \alpha_{ik}) u_{kl} .$$

Se nella prima parte della seconda somma si scambia k con m , e nella seconda parte l con m , si può anche scrivere

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial s_v} = \sum_{k,l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} \left[\frac{\partial u_{kl}}{\partial s_v} + \sum_{m=0}^{m=n} (A_{km}^{(v)} u_{im} - A_{im}^{(v)} u_{km}) \right] ;$$

e poichè dalla (26) si ha, per esprimere l'invariabilità di tutte le curvature,

$$\frac{\partial u_{kl}}{\partial s_v} = \sum_0^n (A_{im}^{(v)} u_{km} - A_{km}^{(v)} u_{im}) ,$$

si vede che

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial s_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_{ij}}{\partial s_2} = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial v_{ij}}{\partial s_n} = 0 \quad ,$$

cioè tutte le v_{ij} sono costanti. Similmente si trova, tenendo presenti le (11),

$$\frac{\partial}{\partial s_v} \sum_j \alpha_{ij} u_j = \sum_j \alpha_{ij} u_{jv} + \sum_{j,k} A_{jk}^{(v)} (\alpha_{ik} u_j + \alpha_{ij} u_k) ,$$

ed è chiaro che l'ultima somma è nulla, perchè gli elementi che corrispondono alle disposizioni jk e kj degli indici sono uguali ed a segni opposti. Intanto si ha

$$\frac{\partial}{\partial s_v} \sum_j v_{ij} \xi_j = \sum_j \alpha_{jv} v_{ij} + \sum_j \alpha_{ij} u_{jv} .$$

Dunque la derivazione della (30) ci dà

$$\frac{\partial v_i}{\partial s_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_i}{\partial s_2} = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial v_i}{\partial s_n} = 0 \quad ,$$

e però anche le v_i sono tutte costanti. È dunque vero che lo spazio non fa che spostarsi rigidamente, in modo cioè che tutti i suoi punti subiscono la stessa traslazione (v_0, v_1, \dots, v_n) e la stessa rotazione, definita dalle costanti v_{ij} .

NOTE VARIE

Sull'uso dei numeri di Grassmann.

L'uso dei *numeri alternati* conferisce una forma assai precisa ed elegante ai calcoli ed ai risultati dell'analisi intrinseca delle superficie, e permette, in particolare, di compendiare in una sola le tre *formole di Codazzi*. Alle note condizioni (XI, 3) necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (x, y, z) si può dar la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{dx}{ds} = i\mathcal{E}.ix + k\mathcal{G}.jy + j\mathcal{O}.kz - i \\ j \frac{dy}{ds} = k\mathcal{G}.ix + j\mathcal{O}.jy + i\mathcal{E}.kz \\ k \frac{dz}{ds} = j\mathcal{O}.ix + i\mathcal{E}.jy + k\mathcal{G}.kz \end{array} \right. \quad (1)$$

convenendo che le *unità* i, j, k abbiano i quadrati nulli, e che inoltre siano soddisfatte le condizioni

$$i = jk = -kj, \quad j = ki = -ik, \quad k = ij = -ji. \quad (2)$$

Ora le (1) si possono compendiare, sommandole, nell'unica formola

$$\frac{d\Omega}{ds} = \omega\Omega - i, \quad (3)$$

in cui compariscono soltanto i vettori

$$\Omega = ix + jy + kz, \quad \omega = i\mathcal{E} + j\mathcal{O} + k\mathcal{G}.$$

Così la derivazione rispetto all'arco si riduce alla semplicissima operazione vettoriale, rappresentata dal simbolo ω . Importa dunque conoscere l'effetto delle operazioni $\omega^2, \omega^3, \dots$ sulle unità fondamentali.

Conviene osservare, innanzi tutto, che, per le convenzioni (2), il prodotto di tre unità fondamentali è generalmente nullo, tranne quando il secondo o il terzo fattore soltanto sia uguale al primo, nei quali due casi il prodotto si riduce al rimanente fattore, preso rispettivamente col segno cambiato o col proprio segno. In altri termini

$$ijj = -j, \quad iji = j, \dots \quad (4)$$

Ne segue, se si considerano più generalmente le operazioni vettoriali

$$\omega_1 = ia_1 + jb_1 + kc_1, \quad \omega_2 = ia_2 + jb_2 + kc_2,$$

che l'operazione

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 = & ii a_1 a_2 + ij a_1 b_2 + ik a_1 c_2 \\ & + ji b_1 a_2 + jj b_1 b_2 + jk b_1 c_2 \\ & + ki c_1 a_2 + kj c_1 b_2 + kk c_1 c_2, \end{aligned}$$

applicata, per esempio, all'unità i , produce il risultato

$$iji a_1 b_2 + iki a_1 c_2 + jji b_1 b_2 + kki c_1 c_2,$$

cioè

$$\omega_1 \omega_2 i = -i(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + \omega_2 a_1. \quad (5)$$

Operando invece sull'unità scalare si ottiene

$$\omega_1 \omega_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

In particolare $\omega^2 = 0$, ed

$$\omega^2 i = -ix^2 + \omega \mathcal{E}, \quad \omega^2 j = -jx^2 + \omega \mathcal{O}, \quad \omega^2 k = -kx^2 + \omega \mathcal{G}, \quad (7)$$

dove x rappresenta il modulo di ω .

Ora è assai facile trovare le formole per le quali i successivi quozienti differenziali x, y, z si esprimono linearmente in x, y, z . Infatti, quando si prescinde dalla variazione delle curvature, la (3) dà

$$\frac{d^n \Omega}{ds^n} = \omega^n \Omega - \omega^{n-1} i,$$

e tutto si riduce al calcolo dei risultati dell'operazione ω^n sulle unità fondamentali. Ed a questi risultati facilmente si perviene mediante le formole (7) e le altre, evidenti,

$$\omega i = j\mathcal{G} - k\mathcal{O}, \quad \omega j = k\mathcal{E} - i\mathcal{G}, \quad \omega k = i\mathcal{O} - j\mathcal{E}, \quad (8)$$

perchè, se si osserva che il risultato di più operazioni vettoriali identiche su qualunque scalare è nullo, si ottiene

$$\omega^{2n+1} i = (-1)^n \omega i x^{2n}, \quad \omega^{2n+2} i = (-1)^n \omega^2 i x^{2n}.$$

In particolare, se si vogliono le formole che fanno conoscere le derivate seconde, si ha

$$\frac{d^2 \Omega}{ds^2} = \omega^2 i x + \omega^2 j y + \omega^2 k z - \omega i,$$

cioè, in virtù di (7) e di (8),

$$\frac{d^2 \Omega}{ds^2} = -\Omega x^2 + k\mathcal{O} - j\mathcal{G} + \omega(\mathcal{E}x + \mathcal{O}y + \mathcal{G}z).$$

Questa eguaglianza si scinde manifestamente in

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2} &= -x^2x + \mathcal{E}(\mathcal{E}x + \mathcal{N}y + \mathcal{Q}z), \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= -x^2y + \mathcal{N}(\mathcal{E}x + \mathcal{N}y + \mathcal{Q}z), \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= -x^2z + \mathcal{Q}(\mathcal{E}x + \mathcal{N}y + \mathcal{Q}z).\end{aligned}$$

Ai secondi membri bisognerà poi aggiungere i termini provenienti dalla variazione delle curvature, cioè

$$x \frac{d\mathcal{N}}{ds} - y \frac{d\mathcal{Q}}{ds}, \quad x \frac{d\mathcal{Q}}{ds} - z \frac{d\mathcal{E}}{ds}, \quad y \frac{d\mathcal{E}}{ds} - x \frac{d\mathcal{N}}{ds}.$$

Un'altra notevole conseguenza trarremo dalla formola (5) osservando in primo luogo che

$$(\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1)i = \omega_2a_1 - \omega_1a_2. \quad (9)$$

Sia $ia + jb + kc$ l'operazione vettoriale equivalente ad $\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1$, sia cioè

$$(ia + jb + kc)\Omega = (\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1)\Omega.$$

In virtù delle (4) si ha

$$i(\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1)i = i(ia + jb + kc)i = jb + kc.$$

Dunque, osservando la (9),

$$\begin{cases} jb + kc = i\omega_2a_1 - i\omega_1a_2, \\ kc + ia = j\omega_2b_1 - j\omega_1b_2, \\ ia + jb = k\omega_2c_1 - k\omega_1c_2; \end{cases}$$

poi, sommando,

$$ia + jb + kc = \frac{1}{2}(\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1) = \omega_1\omega_2. \quad (10)$$

Adunque l'operazione $\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1$, che, applicata alle quantità scalari, equivale a $2\omega_1\omega_2$, si riduce invece ad $\omega_1\omega_2$ quando è applicata ad un vettore.

Ciò premesso, consideriamo sulla superficie un'altra curva, tangente nell'origine all'asse y , e distinguiamo con indici 1 e 2 tutto ciò che si riferisce alla prima o alla seconda curva. Siano q_1 e q_2 i parametri che definiscono le due curve in un doppio sistema ortogonale, tracciato sulla superficie, e si ponga

$$\omega_1 = i\mathcal{E}_1 + j\mathcal{N}_1 + k\mathcal{Q}_1, \quad \omega_2 = i\mathcal{E}_2 - j\mathcal{E}_2 + k\mathcal{Q}_2.$$

La condizione (3), scritta per le curve dell'uno o dell'altro sistema, diventa

$$\frac{\partial\Omega}{\partial s_1} = \omega_1\Omega - i, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial s_2} = -\omega_2\Omega - j, \quad (11)$$

e si sa che per l'esistenza di Ω occorre e basta che si abbia

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial s_1\partial s_2} + \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} \frac{\partial\Omega}{\partial s_1} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial s_2\partial s_1} + \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} \frac{\partial\Omega}{\partial s_2}. \quad (12)$$

Intanto dalle (11) si deduce

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_1 \partial s_2} = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial s_2} - \omega_1 \omega_2 \right) \Omega + j \omega_1, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_2 \partial s_1} = - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial s_1} + \omega_2 \omega_1 \right) \Omega - i \omega_2,$$

ed in particolare, per $\Omega=0$, la (12) diventa

$$j \omega_1 + i \omega_2 = i \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} - j \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1}.$$

Il primo membro ha il valore $i \mathcal{G}_1 - j \mathcal{G}_2 - \mathbf{k}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$; quindi

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2}, \quad \mathcal{G}_2 = \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1}, \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 0,$$

e però si può porre $\mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$. Dopo ciò la formola (12) si riduce subito a

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1} + \omega_1 \mathcal{G}_1 + \omega_2 \mathcal{G}_2 \right) \Omega = (\omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1) \Omega.$$

Dunque, se si tien conto del teorema (10),

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1} + \omega_1 \mathcal{G}_1 + \omega_2 \mathcal{G}_2 = \omega_1 \omega_2.$$

È questa l'eguaglianza che chiude in sé le tre formole di Codazzi, alle quali (cfr. XI, 9) si perviene osservando che il secondo membro ha, in virtù di (6), il valore

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \mathcal{E} & \mathcal{G}_1 & \mathcal{G}_2 \\ \mathcal{G}_2 & \mathcal{E} & \mathcal{G}_1 \end{vmatrix}.$$

Invitiamo il lettore a tentare l'applicazione d'un calcolo analogo negli iperspazii, immaginando un sistema di unità (ij) a due indici, dotate innanzi tutto della proprietà di cambiar segno quando se ne traspongono gli indici. Bisognerà poi supporre che sia $(ij)(kl)=0$ quando i, j, k, l son tutti diversi fra loro, e che si abbia $(ij)(jk)=(ik)$, dimodochè, in particolare, $(ij)^2 = -(ji)(ij) = -(jj) = 0$, mentre invece l'unità (ij) , moltiplicata a sinistra per (ii) , ovvero a destra per (jj) , non si altera; ecc. Del calcolo fondato su queste convenzioni si ha una chiara immagine geometrica supponendo che, dopo aver numerati da 1 ad n i vertici d'un n -edroide $(n-1)$ -*u*plio, si rappresenti con (ij) l'operazione che consiste nel percorrere il lato che va dal vertice i al vertice j . I numeri adoperati precedentemente si riferiscono al caso di $n=3$, in cui le unità sono

$$\mathbf{i} = (32), \quad \mathbf{j} = (13), \quad \mathbf{k} = (21).$$

Sull'equilibrio dei fili flessibili ed inestendibili.

Dato un filo pienamente deformabile in uno spazio lineare ad n dimensioni, prendiamo come assi la tangente, la $(n-1)$ -normale,, la normale principale in un punto mobile del filo. Questo si suppone infinitamente sottile, ma tale, tuttavia, che ciascun elemento ds abbia una certa *massa* qds . Sia X_i la componente, secondo l'asse i , della forza, computata per unità di massa, che agisce su qds , e sia u_i la proiezione dello spostamento sul medesimo asse. I coseni direttori dell'elemento di filo, dopo la deformazione, sono evidentemente proporzionali a $ds + \delta u_1, \delta u_2, \delta u_3, \dots, \delta u_n$, e però, chiamando T la tensione per unità di lunghezza, si avrà, per l'equilibrio con le forze esterne,

$$qX_i ds + \delta \left(T \frac{\delta u_i}{ds} \right) = 0 ,$$

avendo cura di aggiungere Tds a $T\delta u_i$ quando $i=1$. Intanto importa qui notare che le formole fondamentali (XVI, 4) relative alla direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, scritte sotto la forma

$$\frac{\delta \alpha_i}{ds} = \frac{d\alpha_i}{ds} + \frac{\alpha_{i-1}}{\rho_{n-i+2}} - \frac{\alpha_{i+1}}{\rho_{n-i+1}} ,$$

come sempre si può, per ogni valore di i , se si conviene di fare

$$\alpha_{i+n} = -\alpha_i , \quad \rho_{i+n} = \rho_i , \quad \frac{1}{\rho_0} = 0 ,$$

sussistono anche quando, invece delle α , si considerano le proiezioni d'un segmento variabile qualunque sugli assi. Infatti

$$\delta p\alpha_i = \alpha_i dp + p \delta \alpha_i = d p\alpha_i + \left(\frac{p\alpha_{i-1}}{\rho_{n-i+2}} - \frac{p\alpha_{i+1}}{\rho_{n-i+1}} \right) ds .$$

Possiamo dunque scrivere

$$\delta \left(T \frac{\delta u_i}{ds} \right) = d \left(T \frac{\delta u_i}{ds} \right) + \frac{T\delta u_{i-1}}{\rho_{n-i+2}} - \frac{T\delta u_{i+1}}{\rho_{n-i+1}} ,$$

e le equazioni per l'equilibrio diventano, in generale,

$$qX_i + \frac{d}{ds} \left(T \frac{\delta u_i}{ds} \right) + \frac{T}{\rho_{n-i+2}} \frac{\delta u_{i-1}}{ds} - \frac{T}{\rho_{n-i+1}} \frac{\delta u_{i+1}}{ds} = 0 .$$

Finalmente, dopo totale eliminazione del segno δ ,

$$qX_i + \frac{d}{ds} \left[T \left(\frac{du_i}{ds} + \frac{u_{i-1}}{\rho_{n-i+2}} - \frac{u_{i+1}}{\rho_{n-i+1}} \right) \right] + \frac{T}{\rho_{n-i+2}} \frac{du_{i-1}}{ds} - \frac{T}{\rho_{n-i+1}} \frac{du_{i+1}}{ds} \\ + \frac{T u_{i-2}}{\rho_{n-i+3} \rho_{n-i+2}} + \frac{T u_{i+2}}{\rho_{n-i+1} \rho_{n-i}} - T u_i \left(\frac{1}{\rho_{n-i+2}^2} + \frac{1}{\rho_{n-i+1}^2} \right) = 0 .$$

forma semplicissima

$$qX_1 + \frac{dT}{ds} = 0 \quad , \quad qX_n + \frac{T}{\rho_1} = 0 \quad , \quad X_2 = X_3 = \dots = X_{n-1} = 0 \quad ,$$

e si vede che il filo si dispone sempre in modo che il piano osculatore contenga, in ogni punto, la forza acceleratrice. La curva di equilibrio è dunque piana nel caso di forze emananti da un centro. Se la forza acceleratrice X ha una direzione invariabile, ciò si esprime (II, 1) scrivendo

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad ,$$

dove φ è l'inclinazione della tangente al filo sulla direzione di X . Le prime due equazioni dell'equilibrio, le sole di cui convenga tener conto, diventano

$$qX \cos \varphi + \frac{dT}{ds} = 0 \quad , \quad qX \sin \varphi = \frac{T}{\rho} \quad ,$$

ed è facile dedurre, eliminando X ed integrando, che $T \sin \varphi$ conserva lungo tutto il filo un valore *costante* T_0 , dimodochè si ha

$$T = \frac{T_0}{\sin \varphi} \quad , \quad X = \frac{T_0}{q\rho \sin^2 \varphi} \quad .$$

Qui si presentano due casi particolari notevoli. Se il filo è *omogeneo* (q costante) l'ultima equazione dà

$$X = \frac{a}{\rho \sin^2 \varphi} \quad , \quad \int X ds = -a \cot \varphi \quad ,$$

dopo aver posto $T_0 = aq$. Ne segue che l'equazione intrinseca della curva di equilibrio è

$$\rho = \frac{1}{X} \left(a + \frac{1}{a} (\int X ds)^2 \right) \quad .$$

Se poi il filo non è omogeneo, ma si vuole invece farne variare la densità da un estremo all'altro in modo che dappertutto *resista ugualmente* all'azione deformatrice, bisogna porre $T = aq$, con a costante, nella quale ipotesi dalla seconda equazione dell'equilibrio si deduce

$$X = \frac{a}{\rho \sin \varphi} \quad , \quad \int X ds = a \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad ;$$

poi

$$\rho = \frac{a}{2X} \left(e^{\frac{1}{a} \int X ds} + e^{-\frac{1}{a} \int X ds} \right) \quad .$$

Quando, per esempio, X è costante (e si può sempre supporre $X = 1$), come avviene per un filo pesante, che, fissato in due punti, si dispone in equilibrio sotto l'azione della gravità, le due equazioni intrinseche precedentemente ottenute diventano

$$\rho = a + \frac{s^2}{a} \quad , \quad \rho = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right) \quad ,$$

e rappresentano la catenaria ordinaria e la catenaria di uguale resistenza. Così ci rendiamo ragione dei nomi imposti a queste curve (I, 5, *b, c*).

Con eguale rapidità e semplicità di mezzi si trattano altre note questioni di meccanica, e noi esortiamo il lettore a tentare l'applicazione del metodo, qui esposto, allo studio della deformazione di fibre o linee materiali, tagliate in un corpo elastico, considerando, in luogo della tensione, le forze interne che agiscono in tutti i sensi su ciascun elemento di fibra. Le formole che in tal modo si ottengono debbono presentare, per la trattazione di speciali problemi, vantaggi analoghi a quelli delle coordinate curvilinee.

Sulle equazioni della elasticità negli iperspazii.

I calcoli accennati da Beltrami nella Memoria *sulle equazioni generali dell'elasticità* si possono eseguire con una certa speditezza, non priva di eleganza, anche per uno spazio curvo a quante si vogliano dimensioni, facendo uso della segnatura da noi adoperata nell'ultimo capitolo. Prima ricordiamo (XVII, 6, 7) che, essendo $u_0 = 0$, i coefficienti di allungamento e la dilatazione solida unitaria son dati dalle formole

$$\theta_i = u_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial s_i} + \sum \mathcal{G}_{ij} u_j, \quad \Theta = \sum \theta_i = \sum \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_i \right) u_i.$$

Avremo inoltre da considerare i mutui scorrimenti θ_{ij} degli elementi lineari coordinati, e le doppie componenti \mathfrak{S}_{ij} della rotazione del mezzo. Le loro espressioni si ricavano dalle formole

$$\frac{1}{2}(\theta_{ij} + \mathfrak{S}_{ij}) = u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial s_j} - \mathcal{G}_{ji} u_j, \quad \frac{1}{2}(\theta_{ij} - \mathfrak{S}_{ij}) = u_{ji} = \frac{\partial u_j}{\partial s_i} - \mathcal{G}_{ij} u_i, \quad (1)$$

che si riducono in sostanza ad una sola (XVII, form. 15) se si osserva che

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}, \quad \mathfrak{S}_{ij} = -\mathfrak{S}_{ji}.$$

Ciò premesso, quando si assume

$$-\frac{1}{2}(A\Theta^2 + B\sum \mathfrak{S}_{ij}^2) \quad (2)$$

come sola parte efficace del potenziale per la formazione delle equazioni indefinite, si perviene, col solito procedimento, alle equazioni

$$X_i + A \frac{\partial \Theta}{\partial s_i} + B \sum \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j - \mathcal{G}_i \right) \mathfrak{S}_{ij} + 2Ba_i = 0, \quad (3)$$

prive, nel primo membro, dell'ultimo termine. È questo termine che bisogna calcolare affinché le (3) siano, a prescindere dalla variazione delle costanti d'isotropia, le equazioni generali dell'elasticità dei mezzi isotropi in qualsiasi spazio o iperspazio curvo. Intanto, seguendo il processo tenuto da Beltrami per trovare

le formole (4) della sua Memoria, si ottengono, invece delle nostre (3), le equazioni

$$X_i = \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_i \right) T_i - \sum \mathcal{G}_{ji} T_j + \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j + \mathcal{G}_{ij} \right) T_{ij}, \quad (4)$$

nelle quali le T_i e le T_{ij} sono le tensioni degli elementi (lineari e superficiali) coordinati. L'indice i posto all'ultimo segno sommatorio serve a ricordare che bisogna escludere dalla corrispondente somma il termine definito dal valore i di j . Le formole (4) sono indipendenti dalla natura geometrica dello spazio come dalla costituzione fisica del mezzo. Quando questa si particularizza introducendo l'ipotesi dell'isotropia, si ha

$$T_i = -(A - 2B)\Theta - 2B\theta_i, \quad T_{ij} = -B\theta_{ij},$$

e le equazioni (4) diventano

$$X_i + A \frac{\partial \Theta}{\partial s_i} - 2B \frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j + 2B \sum \mathcal{G}_{ji} (\theta_i - \theta_j) + B \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j + \mathcal{G}_{ij} \right) \theta_{ij} = 0.$$

Ora il paragone con (3) dà subito, osservando le (1),

$$\begin{aligned} a_i = & - \frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j + \sum \mathcal{G}_{ji} (\theta_i - \theta_j) + \sum \mathcal{G}_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial s_j} - \mathcal{G}_{ji} u_j \right) \\ & + \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial s_i} - \mathcal{G}_{ij} u_i \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Intanto

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j = \sum^{(i)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial s_j \partial s_i} + \frac{\partial}{\partial s_i} \sum (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) u_j.$$

D'altra parte, in virtù della condizione d'integrabilità (XVII, form. 16), si ha pure

$$\sum^{(i)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial s_j \partial s_i} = \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \right) \frac{\partial u_j}{\partial s_i} + \mathcal{G}_i \frac{\partial u_i}{\partial s_i} - \sum \mathcal{G}_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial s_i} - \sum (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) \frac{\partial u_j}{\partial s_i};$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j = \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \right) \frac{\partial u_j}{\partial s_i} + \mathcal{G}_i \frac{\partial u_i}{\partial s_i} - \sum \mathcal{G}_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial s_i} + \sum u_j \frac{\partial}{\partial s_i} (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij});$$

poi, sostituendo in (5),

$$\begin{aligned} a_i = & \mathcal{G}_i \left(\theta_i - \frac{\partial u_i}{\partial s_i} \right) - \sum \mathcal{G}_{ji} \left(\theta_j - \frac{\partial u_j}{\partial s_j} \right) - u_i \sum \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \mathcal{G}_{ij} \right) \\ & - \sum \left[\frac{\partial}{\partial s_i} (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) + \mathcal{G}_{ij} \mathcal{G}_{ji} \right] u_j. \end{aligned}$$

Così è dimostrato che a_i è una forma lineare delle u :

$$a_i = \sum a_{ij} u_j.$$

Raccogliendo i termini che moltiplicano u_j si ottiene

$$a_{ij} = (\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_{ji}) \mathcal{G}_{ij} - \frac{\partial}{\partial s_i} (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) - \sum \mathcal{G}_{ni} \mathcal{G}_{nj} \quad (6)$$

per $i \leq j$. Invece

$$a_{ii} = - \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial s_i} - \sum \left(\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \mathcal{G}_{ij} + \mathcal{G}_{ij}^2 \right). \quad (7)$$

Ora noi potremmo esprimere i coefficienti a mediante le funzioni Q ; ma è più conveniente introdurre le *curvature normali* \mathcal{N} e le *torsioni geodetiche* \mathcal{T} , tenendo presenti i gruppi (γ) e (δ) delle formole generali di Codazzi (XVII, 4). La formola (7) si può scrivere nel seguente modo:

$$a_{ii} = - \sum \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \frac{\partial \mathcal{G}_{ji}}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ij}^2 + \mathcal{G}_{ji}^2 \right) - \sum (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) \mathcal{G}_{ij}.$$

La seconda somma è uguale a

$$\sum_j \sum_k^{(i)} \mathcal{G}_{kj} \mathcal{G}_{ij} = \sum_k^{(i)} \sum_j \mathcal{G}_{kj} \mathcal{G}_{ij} = \sum_j \sum_k^{(i)} \mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk}.$$

Dunque

$$a_{ii} = - \sum^{(i)} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \frac{\partial \mathcal{G}_{ji}}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ij}^2 + \mathcal{G}_{ji}^2 + \sum \mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk} \right),$$

ovvero, per le (γ),

$$a_{ii} = \sum (\mathcal{N}_i \mathcal{N}_j - \mathcal{T}_{ij}^2). \quad (8)$$

Similmente alle (δ) si può dare la forma

$$a_{ij} = \mathcal{G}_{ij} \sum^{(j)} \mathcal{G}_{ki} - \frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \mathcal{G}_{kj} - \sum \mathcal{G}_{ki} \mathcal{G}_{kj} = - \sum^{(i,j)} \left[\frac{\partial \mathcal{G}_{kj}}{\partial s_i} + (\mathcal{G}_{kj} - \mathcal{G}_{ij}) \mathcal{G}_{kj} \right],$$

cioè, in virtù delle (δ),

$$a_{ij} = - \sum (\mathcal{N}_k \mathcal{T}_{ij} + \mathcal{T}_{ik} \mathcal{T}_{jk}). \quad (9)$$

Questa formola mostra che $a_{ij} = a_{ji}$. Si è dunque condotti a considerare la forma quadratica

$$U = \frac{1}{2} \sum a_{ij} u_i u_j, \quad (10)$$

le cui derivate parziali prime sono appunto le a_i . Per sapere qual'è il significato di U si noti che alle equazioni (3) si sarebbe egualmente pervenuti assumendo come parte efficace del potenziale l'espressione (2) aumentata di $2BU$. Ciò si può esprimere dicendo che la curvatura dello spazio produce una *perdita di energia* elastica, come se una parte di questa energia venisse spesa dal corpo a vincere le difficoltà che incontra per deformarsi in uno spazio *non* lineare. Può tuttavia accadere che sia $U < 0$, ed allora l'energia elastica è invece più intensa di quella che si avrebbe in uno spazio lineare, come se la forma dello spazio fosse tale da agevolare piuttostochè contrariare le deformazioni elastiche. In altri termini, se immaginiamo lo spazio irrigidito nella sua essenza geometrica, e d'altra parte supponiamo la materia dotata d'una specie d'*inerzia*, in virtù della quale essa tenda sempre a deformarsi *come se si trovasse in uno spazio lineare*, possiamo dire che contro tale tendenza reagisce lo spazio con forze che ammettono il potenziale $2BU$.

Per esempio, nel caso d'uno spazio a due dimensioni, si ha $a_{11} = a_{22} = K$, $a_{12} = 0$; quindi $U = \frac{1}{2} K (u_1^2 + u_2^2)$, e le equazioni (3) diventano

$$X_1 + A \frac{\partial \Theta}{\partial s_1} - B \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial s_2} + 2BK u_1 = 0 \quad , \quad X_2 + A \frac{\partial \Theta}{\partial s_2} + B \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial s_1} + 2BK u_2 = 0 \quad ,$$

e restano inalterate nelle deformazioni della superficie, supposta flessibile ma inestendibile. Adunque, sopra una superficie, la perdita di energia elastica è proporzionale al quadrato dello spostamento ed alla curvatura della superficie nel punto che si considera. Per uno spazio qualunque avviene qualche cosa di analogo. Immaginiamo infatti che lo spazio sia riferito al suo *sistema di curvatura*. Sono allora nulle tutte le torsioni \mathfrak{E} , e dalle (9) si ha $a_{ij} = 0$, mentre dalle (8) si vede che a_{ii} è la somma delle curvature totali di tutte le superficie coordinate che contengono la linea q_i . Ora, rappresentando con u_{ij} la proiezione dello spostamento sulla superficie $q_i q_j$, e con K_{ij} la curvatura totale di questa, l'eguaglianza (10) diventa

$$U = \frac{1}{2} \sum K_{ij} u_{ij}^2 .$$

La perdita di energia elastica in uno spazio curvo ad n dimensioni è dunque uguale alla somma delle perdite dovute alle $\frac{1}{2} n(n-1)$ superficie di curvatura.

CORREZIONI ED AGGIUNTE

Pag. 7, linea 17, invece di intrinseca leggi intrinseca

» 8, » 13. Non bisogna intendere in senso troppo ristretto la rassomiglianza qui affermata fra due curve. Convieni anzi ritornare su questo esempio nel § 8 per osservare che, sebbene ρ e φ varino con s allo stesso modo nelle due curve, per la catenaria di eguale resistenza si ha inoltre $\lim u = \pm \frac{1}{2} \pi a$ quando s tende a $\pm \infty$, e però la curva ammette due assintoti paralleli, ed è tutta compresa nella striscia di larghezza πa , che questi determinano nel piano. Del resto anche per valori finiti di s , se si può trovare una certa rassomiglianza fra le due curve, bisogna tuttavia notare che nel dominio dell'origine la catenaria di eguale resistenza si comporta, non come una catenaria propriamente detta, ma come se la sua equazione intrinseca fosse $\rho = a + \frac{s^2}{2a}$.

» 9, linea 10, invece di de leggi da

» 9. Ad evitare equivoci vogliamo qui precisare le cose dette in principio del § 7, ed aggiungere alcune osservazioni. Se φ tende, per $s = \infty$, al limite finito α , e se si ammette anche l'esistenza del limite (finito o infinito) $\lambda = \lim (s : \rho)$, il teorema di l'Hospital dà

$$\lim \frac{s\varphi}{s} = \lim \left(\varphi + \frac{s}{\rho} \right),$$

quando esiste il secondo membro; ma questo esiste, per le ipotesi fatte, ed ha il valore $\alpha + \lambda$, mentre il primo è α . Dunque $\lambda = 0$, vale a dire che *il prodotto dell'arco per la curvatura non può tendere ad un limite non nullo*. Ne segue, in particolare, che la curvatura stessa non può avere un limite diverso da zero, altrimenti λ sarebbe infinito. Qui si noti che, se il teorema di l'Hospital non fosse vero che per λ finito, la dimostrazione precedente sarebbe inutile, giacchè dallo stesso ammettere l'esistenza di λ seguirebbe $\lim (1 : \rho) = 0$; ma non è soltanto questo che si è voluto dimostrare, altrimenti si sarebbe scritto

$$\lim \frac{s^2\varphi}{s^2} = \lim \left(\varphi + \frac{1}{\rho} \right).$$

Più semplicemente le due proposizioni enunciate risultano dalle uguaglianze

$$\lim \frac{\varphi}{s} = \lim \frac{1}{\rho}, \quad \lim \frac{\varphi}{\log s} = \lim \frac{s}{\rho}.$$

Adunque se, crescendo s all'infinito, φ tende ad un limite finito, *la curvatura oscilla o tende a zero*, e si può aggiungere che *tende a zero più rapidamente di $1:s$* . Che la curvatura possa indefinitamente oscillare si vede poi considerando, per esempio, la linea rappresentata dall'equazione

$$\frac{1}{\rho} = \cos(s^2) - \frac{\sin(s^2)}{2s^2},$$

linea composta di archi alternativamente concavi e convessi, in numero infinito, in ciascuno dei quali la curvatura, nulla negli estremi, raggiunge sempre un valore doppio di quello che si ha nell'origine, malgrado che gli archi tendano a zero, e che la tangente, diventando infinite volte parallela alla sua posizione iniziale, tenda ad assumere questa direzione. Sembra ben difficile immaginare condizioni tali, che impedisca-

no l'oscillare della curvatura quando φ tende, per $s = \infty$, ad un limite finito, giacché non si riesce ad ottenere ciò col supporre che φ varii sempre in un senso, nemmeno se si aggiunge l'ipotesi della continuità di ρ . Così, per esempio, con infiniti archi di lunghezza 1, staccati, a partire dalle cuspidi, sulle sviluppani dei circoli, i cui raggi sono $2^3, 2^5, 2^7, \dots$, si può costituire una linea tutta convessa, la cui curvatura, ben lungi dal tendere a zero, riprende indefinitamente valori grandi quanto si vuole, mentre l'angolo φ va continuamente crescendo da 0 ad 1:

$$\varphi = 1 - \frac{1}{2^{[s]}} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{s - [s]} \right).$$

Per ottenere che ρ non cada bruscamente da valori arbitrariamente grandi al valore 0, basta intercalare nella suddetta serie un'altra serie di archi, ordinatamente uguali ai primi, alternando gli archi della prima serie con quelli della seconda, ed invertendo il senso positivo di questi ultimi.

pag. 30, linea 18, invece di *svilupata* leggi *svilupante*

» 40, sulla figura, cambiare r in r' , ed r' in r

» 67, sull'ultima figura, mettere M nel punto di contatto dei due circoli

» 73, linea 3, invece di Dunque, *se* leggi Dunque *se*,

» 81, sulla figura, invece di L leggi Γ

» 109, linea 13, dal fondo, invece di $\frac{\partial}{\partial s_2^2}$ leggi $\frac{\partial^2}{\partial s_2^2}$

» 112, invece di **Condizioni** leggi **Condizione**

» 124, nel primo membro della terza formola (14), invece di $\frac{dy}{ds}$ leggi $\frac{\delta y}{\delta s}$

» 133, sulla figura, invece di ω leggi τ

» 145, § 7. Il lettore immaginerà facilmente altre questioni, che gli diano agio di esercitarsi sulla discussione intrinseca delle curve storte. Così, per esempio, se si vuol sapere *quali, fra le curve tracciate sopra una sfera di raggio R, hanno la torsione costante*, si ha subito

$$\psi = \int \frac{ds}{r} = \frac{s}{a}, \quad \rho = ka \cos \frac{s}{a}, \quad \varphi = k \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{s}{2a} \right),$$

dopo aver posto $r = a$, $R = ka$; e si vede (I, 9) che la trasformata piana (IX, 13, d) consta di archi di lunghezza πa , in numero infinito, ciascuno dei quali si avvolge assintoticamente intorno agli estremi, simmetrici rispetto alla normale nell'origine, come a pag. 16 nella prima delle due figure di destra. Quando si torce un tale arco, senza fletterlo, per collocarlo sulla sfera, gli estremi restano punti assintotici, e nel dominio di ciascuno di essi la curva si può considerare come tracciata nel piano tangente ($\psi = \frac{1}{2}\pi$). Nell'origine, invece, la curva oscula un circolo massimo, e lo attraversa, perchè da un estremo all'altro il piano osculatore va ruotando sempre in un senso. Così avviene che in ciascuno degli emisferi, determinati dal suddetto circolo, sta un punto assintotico. Proiettata sul piano del circolo, la curva conserva la forma generale della trasformata piana; ma la sua proiezione sul piano tangente nell'origine degli archi rassomiglia invece ad una clotoide. Circostanze analoghe si presentano nelle *curve sferiche, per le quali è costante il prodotto delle curvature*. Posto $R = k^2 a$, $\rho r = aR$, si trova infatti che queste curve sono rappresentate dalle equazioni

$$\rho = \frac{2k^2 a}{e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}}, \quad r = \frac{a}{2} (e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}),$$

facili a discutere. La sola differenza rilevante con le curve precedenti sta in ciò, che le ultime ottenute sono costituite da un arco unico, di lunghezza infinita, quantunque limitato a due punti assintotici.

» 145, linea 11, dal fondo, invece di $\sqrt{1 - a^2}$ leggi $\sqrt{1 - \alpha^2}$

pag. 168. Delle due uguaglianze scritte nell'ultima linea, la seconda si può dedurre dalla prima mediante la solita regola di l'Hospital, ammettendo, beninteso, che la derivata parziale di Q_2 rispetto a q_1 abbia un limite per q_1 infinitesimo; ma, poichè il solo ammettere che questa derivata esista include l'ipotesi della continuità di Q_2 rispetto a q_1 , si ha $Q_2=0$ per $q_1=0$, e la prima delle due citate uguaglianze ci dice ancora che

$$\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} = 1 \text{ per } q_1 = 0,$$

in virtù della definizione stessa della derivata. Si può dunque affermare qualche cosa di più del contenuto della seconda eguaglianza; ma ciò equivale semplicemente a dire che anche la derivata di Q_2 rispetto a q_1 è, per $q_1=0$, funzione continua di q_1 .

- » 176, linea 16, invece di (II, 2) leggi (II, 1)
- » 205, linea 5. Per maggior chiarezza invece di corrispondenti si legga perpendicolari, e si aggiunga che ciascun piano focale, per una data g , contiene g ed una delle due g' infinitamente vicine, che incontrano g . I piani focali sono dunque i piani tangenti alle due serie di sviluppabili contenute nella congruenza.
- » 205. Dopo il § 4 è utile aggiungere che, in ogni congruenza, l'insieme delle rette g' , infinitamente vicine a g , ha la notevole proprietà, segnalata da Sturm, di poter essere sempre considerato come appartenente ad una congruenza lineare. Infatti nel passaggio di g alla posizione g' , questa retta assume, come si è detto nel § 2, i coseni direttori

$$\alpha = \text{sen } \omega \cdot d\sigma, \quad \beta = -\text{cos } \omega \cdot d\sigma, \quad \gamma = 1;$$

e le altre coordinate di g' sono, se si trascurano gli infinitesimi superiori, $\xi = y$, $\eta = -x$, $\zeta = 0$, giacchè le nuove coordinate x, y, z dell'origine sono infinitesime. Del resto le formole fondamentali mostrano che l'origine, nel passare da g su g' , acquista, rispetto agli assi iniziali, le coordinate

$$x = -\beta p_1 - \alpha q_2, \quad y = -\beta q_1 + \alpha p_2, \quad z = -\beta r_1 + \alpha r_2.$$

Dunque g' appartiene, qualunque sia ω , alla congruenza lineare definita dalle equazioni

$$\xi = -\beta q_1 + \alpha p_2, \quad \eta = \beta p_1 + \alpha q_2,$$

e però incontra certe due rette, che si determinano facilmente supponendo nulli una volta p_1 e q_2 , ed un'altra p_2 e q_1 . In particolare, se la congruenza è normale, si può sempre supporre $p_1=p_2=0$, $q_1=R_2$, $q_2=R_1$. Dunque le normali ad una superficie, nei punti infinitamente vicini ad M , si appoggiano tutte agli assi dei circoli osculatori delle due sezioni normali principali, che passano per M .

- » 234, linea 2, invece di $n-1$ leggi $n-i$
- » 237, » 14, » » $A_k^{(i)}$ leggi $A_{jk}^{(i)}$
- » 239, formola (j), invece di $\frac{\partial G_{jk}}{\partial s_j}$ leggi $\frac{\partial G_{ik}}{\partial s_j}$
- » 256. Il teorema enunciato nelle linee 3^a e 4^a spiega in altro modo (XI, 8) perchè un filo, teso sopra una superficie, si dispone in forma di geodetica. Infatti la superficie, al filo che tende a rettificarsi, oppone *normalmente* una reazione F , che deve anche stare nel piano osculatore della curva di equilibrio. Questa è dunque tale che il piano osculatore in ciascun punto è normale alla superficie, e però è una geodetica. Inoltre si vede che

$$\rho q F = T = \text{costante},$$

cioè la reazione, computata per unità di lunghezza, è *proporzionale alla curvatura del filo*, e così ci spieghiamo anche perchè manca la reazione nei punti di contatto del filo con le assintotiche della superficie.

INDICE

I. Discussione intrinseca delle curve piane	<i>pag.</i> 5
II. Formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle curve piane. . .	» 20
III. Curve piane notevoli	» 34
IV. Contatto ed osculazione	» 54
V. Le rullette	» 65
VI. I baricentri	» 77
VII. Analisi baricentrica	» 87
VIII. Sistemi di curve piane	» 107
IX. Curve storte e superficie rigate	» 122
X. Curve storte notevoli.	» 141
XI. Teoria generale delle superficie	» 151
XII. Esercizi sulle superficie.	» 173
XIII. Deformazioni infinitesime delle superficie	» 194
XIV. Le congruenze	» 202
XV. Gli spazii a tre dimensioni	» 209
XVI. Curve negli iperspazii	» 226
XVII. Iperspazii	» 236
NOTE { 1. Sull'uso dei numeri di Grassmann	» 250
2. Sull'equilibrio dei fili flessibili ed inestendibili	» 254
3. Sulle equazioni della elasticità negli iperspazii	» 257
Correzioni ed aggiunte	» 261



Acme
Bookbinding Co., Inc.
100 Cambridge St.
Charlestown, MA 02129



Math 9008.96.3
Lezioni di geometria intrinseca.
Cabot Science 003356107



3 2044 091 922 344